

1

解答解説のページへ

O を原点とする xy 平面において、直線 $y=1$ の $|x| \geq 1$ を満たす部分を C とする。

- (1) C 上に点 $A(t, 1)$ をとるとき、線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。
- (2) 点 A が C 全体を動くとき、線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め、それを図示せよ。

2

解答解説のページへ

自然数 n に対し、関数 $F_n(x) = \int_x^{2x} e^{-t^n} dt$ ($x \geq 0$) を考える。

- (1) 関数 $F_n(x)$ ($x \geq 0$) はただ 1 つの点で最大値をとることを示し、 $F_n(x)$ が最大となるような x の値 a_n を求めよ。
- (2) (1) で求めた a_n に対し、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。円 $C : x^2 + (y + \sin \alpha)^2 = 1$ および、その中心を通る直線 $l : y = (\tan \alpha)x - \sin \alpha$ を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ。
- (2) 等式 $2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。
- (3) 連立不等式

$$y \leq (\tan \alpha)x - \sin \alpha, \quad x^2 + (y + \sin \alpha)^2 \leq 1$$

の表す xy 平面上の図形を D とする。図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

数列 $\{a_n\}$ を, $a_1 = 1$, $(n+3)a_{n+1} - na_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定める。

(1) $b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 等式 $p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つように, 定数 p, q, r の値を定めよ。

(3) $\sum_{k=1}^n a_k$ を n の式で表せ。

5

解答解説のページへ

実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。座標平面上の 2 点 $P(x, y)$, $Q(u, v)$ について等式 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が成り立つとき、行列 A により点 P は点 Q に移るといふ。

点 $(1, 3)$ は行列 A により点 $(10, 10)$ に移り、さらに等式

$$A^2 - 7A + 10E = O$$

が成り立つものとする。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 A により点 $(10, 10)$ が移る点の座標を求めよ。
- (2) 実数 a, b, c, d の値を求めよ。
- (3) 次の条件(*)を満たす直線 l の方程式を求めよ。
 (*) 直線 l 上のすべての点が行列 A により l 上の点に移る。

6

解答解説のページへ

d を正の定数とする。2 点 $A(-d, 0)$, $B(d, 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A , 点 B , 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP , BP , OP とかく。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。
- (2) $AP^2 + BP^2$ および $AP \cdot BP$ を, OP と d を用いて表せ。
- (3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき, $AP^3 + BP^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1) 線分 OA の垂直二等分線の方程式は、中点が $(\frac{t}{2}, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{OA} = (t, 1)$ より、

$$t(x - \frac{1}{2}t) + (y - \frac{1}{2}) = 0, \quad 2tx + 2y - t^2 - 1 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(2) ①を t についてまとめると、 $t^2 - 2xt - 2y + 1 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$

すると、 $|t| \geq 1$ のとき直線①が通過する点 (x, y) は、 t についての 2 次方程式②が $|t| \geq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ (x, y) の条件として求められる。

ここで、 $f(t) = t^2 - 2xt - 2y + 1 = (t - x)^2 - x^2 - 2y + 1$ とおくと、

(i) $|x| \geq 1$ ($x \leq -1, 1 \leq x$) のとき

求める条件は、 $f(x) = -x^2 - 2y + 1 \leq 0$ より、

$$y \geq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

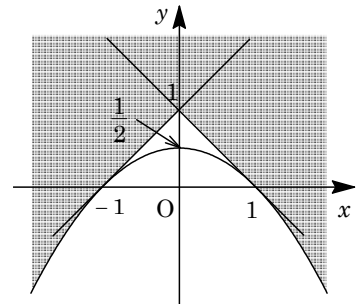
(ii) $|x| < 1$ ($-1 < x < 1$) のとき

求める条件は、 $f(1) = 1 - 2x - 2y + 1 \leq 0$ または $f(-1) = 1 + 2x - 2y + 1 \leq 0$ より、

$$y \geq -x + 1 \text{ または } y \geq x + 1$$

(i)(ii)より、求める領域は右図の網点部となる。

ただし、境界は領域に含む。



[解説]

直線の通過領域を求める頻出問題です。2 次方程式の実数解の条件として処理をしています。

2

問題のページへ

(1) 自然数 n に対し, $f_n(t) = e^{-t^n}$ とおくと, $F_n(x) = \int_x^{2x} f_n(t) dt$ より,

$$F_n'(x) = f_n(2x) \cdot 2 - f_n(x) = 2e^{-(2x)^n} - e^{-x^n} = e^{-x^n} (2e^{-(2^n-1)x^n} - 1)$$

ここで, $g(x) = 2e^{-(2^n-1)x^n} - 1$ とおくと, $2^n - 1 \geq 1$ から, $x \geq 0$ において $g(x)$ は単調に減少し,

$$g(0) = 2 - 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2e^{-(2^n-1)x^n} - 1) = -1$$

これより, $x \geq 0$ において, $g(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもち,

$$e^{-(2^n-1)x^n} = \frac{1}{2}, \quad -(2^n-1)x^n = -\log 2, \quad x^n = \frac{\log 2}{2^n-1}$$

よって, $x = \left(\frac{\log 2}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ となり, この値を $x = \alpha$

とおくと, $F_n(x)$ の増減は右表のようになる。

すると, 関数 $F_n(x)$ ($x \geq 0$) はただ 1 つの点で最大値をとり, $F_n(x)$ が最大となる x の値 a_n は,

$$a_n = \alpha = \left(\frac{\log 2}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(2) (1)より, $\log a_n = \frac{1}{n} \log\left(\frac{\log 2}{2^n-1}\right) = \frac{\log(\log 2)}{n} - \frac{\log(2^n-1)}{n}$

ここで, 自然数 n に対し, $2^{n-1} \leq 2^n - 1 < 2^n$ より,

$$(n-1)\log 2 \leq \log(2^n-1) < n \log 2, \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)\log 2 \leq \frac{\log(2^n-1)}{n} < \log 2$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log(\log 2)}{n} - \frac{\log(2^n-1)}{n} \right\} = -\log 2$

[解説]

関数の形が複雑なため, 式変形に注意力が要求されますが, 内容的は基本的です。

3

問題のページへ

(1) $l: y = (\tan \alpha)x - \sin \alpha$ と $C: x^2 + (y + \sin \alpha)^2 = 1$ を連立すると,

$$x^2 + (\tan^2 \alpha)x^2 = 1, \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} x^2 = 1, \quad x = \pm \cos \alpha$$

すると, $y = \pm \sin \alpha - \sin \alpha$ から, $x = \cos \alpha$ のとき $y = 0$, $x = -\cos \alpha$ のとき $y = -2\sin \alpha$ となり, l と C の交点は, $(\cos \alpha, 0)$, $(-\cos \alpha, -2\sin \alpha)$ である。

(2) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ とおくと, $f(-x) = f(x)$ から, $f(x)$ は偶関数であり,

$$\int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_0^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{よって, } 2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(3) $y \leq (\tan \alpha)x - \sin \alpha$ かつ $x^2 + (y + \sin \alpha)^2 \leq 1$ の

表す図形 D は右図の網点部となる。ここで, D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。

さて, $C: x^2 + (y + \sin \alpha)^2 = 1$ より,

$$y = \pm \sqrt{1-x^2} - \sin \alpha$$

$$\text{そこで, } V_1 = \pi \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} (-\sqrt{1-x^2} - \sin \alpha)^2 dx$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi (2\sin \alpha)^2 \cdot 2\cos \alpha = \frac{8}{3} \pi \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$V_3 = \pi \int_{\cos \alpha}^1 \{(-\sqrt{1-x^2} - \sin \alpha)^2 - (\sqrt{1-x^2} - \sin \alpha)^2\} dx$$

すると, $V = V_1 - V_2 + V_3$ となり,

$$V_1 = \pi \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} (1-x^2 + \sin^2 \alpha) dx + 2\pi \sin \alpha \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\cos \alpha} (-x^2 + 1 + \sin^2 \alpha) dx + 2\pi \sin \alpha \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx$$

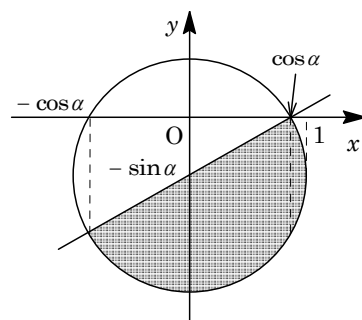
$$= 2\pi \left[-\frac{x^3}{3} + (1 + \sin^2 \alpha)x \right]_0^{\cos \alpha} + 2\pi \sin \alpha \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= -\frac{2}{3} \pi \cos^3 \alpha + 2\pi (1 + \sin^2 \alpha) \cos \alpha + 2\pi \sin \alpha \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= -\frac{8}{3} \pi \cos^3 \alpha + 4\pi \cos \alpha + 2\pi \sin \alpha \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$V_2 = \frac{8}{3} \pi \cos \alpha - \frac{8}{3} \pi \cos^3 \alpha$$

$$V_3 = \pi \int_{\cos \alpha}^1 4\sin \alpha \sqrt{1-x^2} dx = 4\pi \sin \alpha \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$



(2)から, $2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ なので,

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \cos \alpha - \frac{8}{3}\pi \cos \alpha + 2\pi \sin \alpha \left\{ \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx + 2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx \right\} \\ &= \frac{4}{3}\pi \cos \alpha + 2\pi \sin \alpha \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\pi \cos \alpha + \pi^2 \sin \alpha \end{aligned}$$

[解説]

(3)では, 求積の方法について迷いますが, (2)の結果を活用することを考えるのが, 本問では最適でしょう。

4

問題のページへ

(1) 条件より, $a_1 = 1$, $(n+3)a_{n+1} - na_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ から,

$$(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1} - n(n+1)(n+2)a_n = (n+2) - (n+1)$$

$b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ より, $b_{n+1} - b_n = 1$ となるので,

$$b_n = b_1 + (n-1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_1 + n - 1 = n + 5$$

(2) (1)より, $p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = n+5$ の係数を比べて,

$$p+q+r=0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad 3p+2q+r=1 \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad 2p=5 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③より, $p = \frac{5}{2}$ となり, ①②に代入して, $q+r = -\frac{5}{2}$, $2q+r = -\frac{13}{2}$

これより, $q = -4$, $r = \frac{3}{2}$

(3) (1)より, $a_n = \frac{n+5}{n(n+1)(n+2)}$ となり, (2)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{p}{n} + \frac{q}{n+1} + \frac{r}{n+2} = \frac{5}{2n} - \frac{4}{n+1} + \frac{3}{2(n+2)} \\ &= \frac{5}{2n} - \frac{5+3}{2(n+1)} + \frac{3}{2(n+2)} = \frac{5}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{n}{n+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{2(n+2)} \\ &= \frac{10n(n+2) - 3n(n+1)}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(7n+17)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

[解説]

(3)の解法は, 上のようなものが想定されていると思われますが, もし $4 = \frac{5+3}{2}$ に気付かなかったときは, (2)を無視し, $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{5}{n(n+1)(n+2)}$ として和を求めます。

5

問題のページへ

$$(1) A^2 - 7A + 10E = O \text{ より, } (A^2 - 7A + 10E) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, 条件より, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{2}$ なので, $A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ となり, ①から,

$$A \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$(2) \textcircled{3} \text{ より, } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ となり, } \textcircled{2} \text{ と合わせて, } A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

よって, $a=4$, $b=2$, $c=1$, $d=3$

(3) 直線 l の方程式を, $x=k$ または $y=mx+n$ とおく。

(i) $l: x=k$ のとき

t を任意の実数として, 直線 l 上の任意の点を (k, t) とおくと,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k+2t \\ k+3t \end{pmatrix}$$

点 (u, v) は l 上の点より, $4k+2t=k$, $3k+2t=0 \cdots \cdots \textcircled{4}$

しかし, 任意の t に対して, ④が成立する定数 k は存在しない。

(ii) $l: y=mx+n$ のとき

t を任意の実数として, 直線 l 上の任意の点を $(t, mt+n)$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4+2m)t+2n \\ (1+3m)t+3n \end{pmatrix}$$

点 (u, v) は l 上の点より, $(1+3m)t+3n=m\{(4+2m)t+2n\}+n \cdots \cdots \textcircled{5}$

任意の t に対して, ⑤が成立する条件は,

$$1+3m=m(4+2m) \cdots \cdots \textcircled{6}, \quad 3n=2mn+n \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑥より, $2m^2+m-1=0$, $(2m-1)(m+1)=0$ となり, $m=\frac{1}{2}$, -1

⑦より, $(m-1)n=0$ となり, $m=\frac{1}{2}$, -1 のいずれのときも, $n=0$ である。

(i)(ii)より, 直線 l の方程式は, $y=\frac{1}{2}x$ または $y=-x$ である。

[解説]

1 次変換の基本題で, どの設問もいろいろな解法があります。その 1 つの解答例を記しました。

6

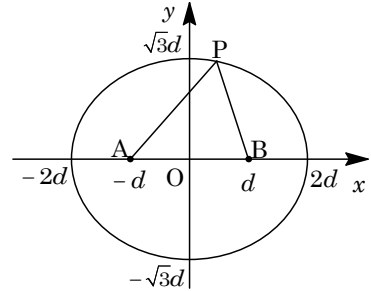
問題のページへ

- (1) 焦点が
- $A(-d, 0)$
- ,
- $B(d, 0)$
- より、楕円
- E
- の中心は原点となるので、

$$E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 - b^2 = d^2)$$

条件より、 $2a = 4d$ から、 $a = 2d$ となり、

$$b^2 = a^2 - d^2 = 3d^2, \quad b = \sqrt{3}d$$

これより、長軸の長さは $2a = 4d$ 、短軸の長さは $2b = 2\sqrt{3}d$ となる。

- (2)
- $P(x, y)$
- とおくと、

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 &= (x+d)^2 + y^2 + (x-d)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2) + 2d^2 \\ &= 2OP^2 + 2d^2 \dots\dots\dots ① \end{aligned}$$

また、 $AP + BP = 4d$ なので、①より、

$$2OP^2 + 2d^2 = (AP + BP)^2 - 2AP \cdot BP = 16d^2 - 2AP \cdot BP$$

よって、 $AP \cdot BP = 8d^2 - OP^2 - d^2 = 7d^2 - OP^2 \dots\dots\dots ②$

- (3)
- $AP^3 + BP^3 = (AP + BP)(AP^2 + BP^2 - AP \cdot BP)$
- なので、①②より、

$$AP^3 + BP^3 = 4d(2OP^2 + 2d^2 - 7d^2 + OP^2) = 4d(3OP^2 - 5d^2) \dots\dots\dots ③$$

ここで、 $\sqrt{3}d \leq OP \leq 2d$ から $3d^2 \leq OP^2 \leq 4d^2$ であり、③より、 $AP^3 + BP^3$ の最大値は $4d(12d^2 - 5d^2) = 28d^3$ 、最小値は $4d(9d^2 - 5d^2) = 16d^3$ となる。

[解説]

楕円の定義について、基本事項を確認する問題です。なお、①式は中線定理です。