1

解答解説のページへ

x の方程式 $|\log_{10} x| = px + q$ （p, q は実数）が 3 つの相異なる正の解をもち，次の 2 つの条件を満たすとする。

(Ⅰ) 3 つの解の比は，$1:2:3$ である。

(Ⅱ) 3 つの解のうち最小のものは，$\dfrac{1}{2}$ より大きく，1 より小さい。

このとき，$A = \log_{10} 2$，$B = \log_{10} 3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

曲線$C: y=\dfrac{1}{x+2}\ (x>-2)$を考える。曲線 C 上の点$\mathrm{P}_1\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$における接線を$l_1$とし，$l_1$ と x 軸との交点をQ_1，点Q_1を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点をP_2とおく。以下同様に，自然数 $n\,(n \geqq 2)$に対して，点P_nにおける接線をl_nとし，l_n と x 軸との交点をQ_n，点Q_nを通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点をP_{n+1}とおく。

(1)　l_1の方程式を求めよ。

(2)　P_nの x 座標を$x_n\ (n \geqq 1)$とする。x_{n+1}をx_nを用いて表し，x_nを n を用いて表せ。

(3)　l_n，x 軸，y 軸で囲まれる三角形の面積S_nを求め，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$を求めよ。

3

解答解説のページへ

曲線$C: y=\log x\ (x>0)$を考える。自然数 n に対して，曲線 C 上に点$\mathrm{P}(e^n,\ n)$，$\mathrm{Q}(e^{2n},\ 2n)$をとり，x 軸上に点$\mathrm{A}(e^n,\ 0)$，$\mathrm{B}(e^{2n},\ 0)$をとる。四角形 APQB を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を$V(n)$とする。また，線分 PQ と曲線 C で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を$S(n)$とする。

(1)　$V(n)$を n の式で表せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{V(n)}$を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

四面体 OABC において，次が満たされているとする。

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$$

点 A, B, C を通る平面を α とする。点 O を通り平面 α と直交する直線と，平面 α との交点を H とする。

(1)　$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ。

(2)　点 H は△ABC の垂心であること，すなわち $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ を示せ。

(3)　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1$ とする。このとき，△ABC の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ。

5

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面において原点のまわりに角 θ $(0<\theta<\pi)$ だけ回転する移動を表す行列を A とする。A が等式 $A^2-A+E=O$ を満たすとき，θ と A を求めよ。ただし，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ である。

(2) 直線 $y=\sqrt{3}x$ に関する対称移動を表す行列 B を求めよ。

(3) 直線 $y=kx$ に関する対称移動を表す行列 C とする。(1), (2)において求めた行列 A, B に対して $BC=A$ が成り立つとき，k を求めよ。

6

解答解説のページへ

2 つの双曲線$C: x^2-y^2=1$，$H: x^2-y^2=-1$を考える。双曲線 H 上の点$\mathrm{P}(s,\ t)$に対して，方程式$sx-ty=1$で定まる直線を l とする。

(1)　直線 l は点 P を通らないことを示せ。

(2)　直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わることを示し，△PQR の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。

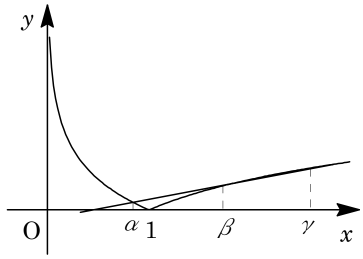
(3)　(2)における 3 点 G, Q, R に対して，△GQR の面積は点$\mathrm{P}(s,\ t)$の位置によらず一定であることを示せ。

1

問題のページへ

$\left|\log_{10} x\right| = px + q$ の解を $x = \alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha < \beta < \gamma)$ とおくと，条件より，

$$\beta = 2\alpha\ ,\ \gamma = 3\alpha$$



また，$\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ より，$1 < \beta < 2$，$\dfrac{3}{2} < \gamma < 3$ となり，

$$-\log_{10}\alpha = p\alpha + q \cdots\cdots①$$

$$\log_{10}\beta = p\beta + q\ ,\ \log_{10} 2\alpha = 2p\alpha + q \cdots\cdots②$$

$$\log_{10}\gamma = p\gamma + q\ ,\ \log_{10} 3\alpha = 3p\alpha + q \cdots\cdots③$$

①②より，$\log_{10} 2\alpha + \log_{10}\alpha = p\alpha\ ,\ \log_{10} 2 + 2\log_{10}\alpha = p\alpha \cdots\cdots\cdots④$

①③より，$\log_{10} 3\alpha + \log_{10}\alpha = 2p\alpha\ ,\ \log_{10} 3 + 2\log_{10}\alpha = 2p\alpha \cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$2\log_{10} 2 - \log_{10} 3 + 2\log_{10}\alpha = 0$ から，$\log_{10}\alpha = \dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{3}{4} = \log_{10}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，④に代入すると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}p = \log_{10} 2 + \log_{10}\frac{3}{4} = \log_{10}\frac{3}{2} = B - A\ ,\ \ p = \frac{2}{\sqrt{3}}(B - A)$$

さらに，①に代入すると，

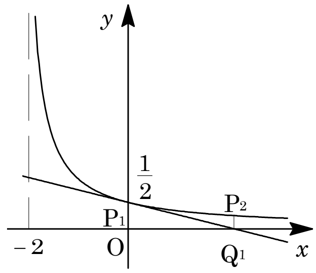
$$q = -\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2} - (B - A) = -\frac{1}{2}B + A - B + A = 2A - \frac{3}{2}B$$

［解　説］

簡明な設定のうまくまとまった問題です。ただ，A，B という置き換えのため，同値な答が，複数，出現するような気がします。

2

問題のページへ



(1)　$C: y=\dfrac{1}{x+2}$ に対し，$y'=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$

点 $\mathrm{P}_1\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線 l_1 の傾きは $-\dfrac{1}{4}$ より，その方程式は，

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x\ ,\ \ y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

(2)　(1)と同様に，点 $\mathrm{P}_n\left(x_n,\ \dfrac{1}{x_n+2}\right)$ における接線 l_n の傾きは，$-\dfrac{1}{(x_n+2)^2}$ より，その方程式は，

$$y-\frac{1}{x_n+2}=-\frac{1}{(x_n+2)^2}(x-x_n)\cdots\cdots\cdots①$$

x 軸との交点 Q_n の x 座標は，①より，

$$-\frac{1}{x_n+2}=-\frac{1}{(x_n+2)^2}(x-x_n),\ \ x_n+2=x-x_n$$

よって，$x=2x_n+2$ となり，Q_n の x 座標は P_{n+1} の x 座標 x_{n+1} と等しいことより，

$$x_{n+1}=2x_n+2\cdots\cdots\cdots②$$

②を変形すると，$x_{n+1}+2=2(x_n+2)$ となり，$x_1=0$ のもとで，

$$x_n+2=(x_1+2)2^{n-1}=2^n\ ,\ \ x_n=2^n-2$$

(3)　接線 l_n と y 軸との交点を R_n とすると，R_n の y 座標は①より，

$$y-\frac{1}{x_n+2}=-\frac{1}{(x_n+2)^2}(-x_n)\ ,\ \ y=\frac{x_n}{(x_n+2)^2}+\frac{1}{x_n+2}=\frac{2x_n+2}{(x_n+2)^2}$$

すると，$\triangle\mathrm{OQ}_n\mathrm{R}_n$ の面積 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}(2x_n+2)\cdot\frac{(2x_n+2)}{(x_n+2)^2}=\frac{2(x_n+1)^2}{(x_n+2)^2}=\frac{(2^n-1)^2}{2^{2n-1}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}-2^{n+1}+1}{2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}(2-2^{-n+2}+2^{-2n+1})=2$

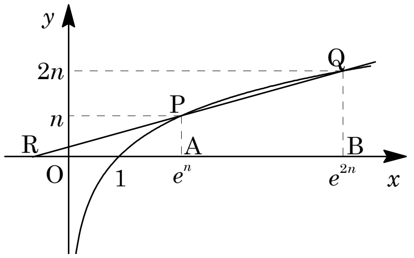
［解　説］

漸化式と極限についての基本的な問題です。

3

問題のページへ

(1) 直線 PQ と x 軸との交点を R とおくと，R は線分 AB を$1:2$に外分する点となり，その座標は，$\mathrm{R}(2e^n-e^{2n},\ 0)$である。



さて，△RPA を x 軸のまわりに 1 回転してできる円錐と，△RQB を x 軸のまわりに 1 回転してできる円錐の体積比は，$1^3:2^3=1:8$ である。

すると，四角形 APQB を x 軸のまわりに 1 回転してできる円錐台の体積$V(n)$は，

$$V(n)=\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{3}\pi(2n)^2(e^{2n}-2e^n+e^{2n})=\frac{7}{3}\pi n^2(e^{2n}-e^n)$$

(2) 線分 PQ と曲線 C で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積$S(n)$は，

$$S(n)=\pi\int_{e^n}^{e^{2n}}(\log x)^2dx-V(n)$$

ここで，$I=\displaystyle\int_{e^n}^{e^{2n}}(\log x)^2dx=\Big[\,x(\log x)^2\,\Big]_{e^n}^{e^{2n}}-2\int_{e^n}^{e^{2n}}\log x\,dx$

$$=4n^2e^{2n}-n^2e^n-2\Big[\,x\log x-x\,\Big]_{e^n}^{e^{2n}}$$

$$=4n^2e^{2n}-n^2e^n-2(2ne^{2n}-e^{2n}-ne^n+e^n)$$

$$=(4n^2-4n+2)e^{2n}-(n^2-2n+2)e^n$$

よって，$S(n)=\pi(4n^2-4n+2)e^{2n}-\pi(n^2-2n+2)e^n-V(n)$となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{V(n)}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{7}\cdot\frac{(4n^2-4n+2)e^{2n}-(n^2-2n+2)e^n}{n^2(e^{2n}-e^n)}-1\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{7}\cdot\frac{(4-4n^{-1}+2n^{-2})-(1-2n^{-1}+2n^{-2})e^{-n}}{1-e^{-n}}-1\right\}$$

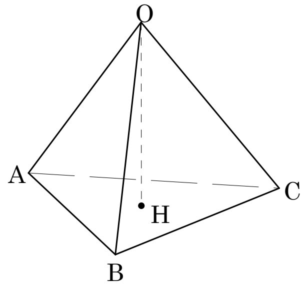
$$=\frac{3}{7}\cdot4-1=\frac{5}{7}$$

［解 説］

円錐台の体積を求めるには，定積分の実行でも，もちろん構いません。しかし，点 P, Q の y 座標に注目すると，上の解答例のような省エネの方法がおすすめです。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である。

(2)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$$

ここで，(1)の結論を用いると $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である。

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0\cdots\cdots\cdots$①

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ となり，①より，

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0,\ \ \overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\cdots\cdots\cdots$②

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となり，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\ \ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1$ のとき，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=4-2+4=6$$

よって，$\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{6}$ となり，同様にして，$\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=\sqrt{6}$

すると，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形となり，その垂心 H は重心に一致し，

$$\mathrm{AH}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{6}\sin 60^\circ=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}$$

これより，$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{2}$ となる。

［解 説］

設問がたくさんありますが，条件の対称性から「同様にして」という表現で，細部の記述を省略しています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$A^2-A+E=O$ から，$(A+E)(A^2-A+E)=O$ となり，$A^3=-E$ ………(＊)

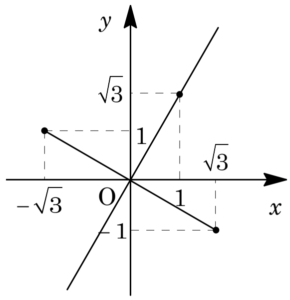
ここで，行列 A は原点のまわりに角 θ の回転を表す行列なので，A^3 は原点のまわりに角 3θ の回転を表す行列となる。

$0<\theta<\pi$ から $0<3\theta<3\pi$ となり，(＊)より $3\theta=\pi$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であり，

$$A=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3}\\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

このとき，$A^2-A+E=O$ は成立する。

(2)　直線 $y=\sqrt{3}x$ に関する対称移動によって，点 $(1,\ \sqrt{3})$ は $(1,\ \sqrt{3})$ に移り，点 $(\sqrt{3},\ -1)$ は $(-\sqrt{3},\ 1)$ に移る。この対称移動を表す行列 B を用いて，



$$B\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

まとめると，$B\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ となり，

$$B=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

(3)　直線 $y=\sqrt{3}x$ に関する対称移動は，原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した後，x 軸に関する対称移動を行い，さらに原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転することに等しい。

すると，x 軸に関する対称移動を表す行列を P とおくと，$B=APA^{-1}$ となる。

さて，条件より，$BC=A$ であり，しかも $B^2=E$ から $B^{-1}=B$ なので，

$$C=B^{-1}A=BA=(APA^{-1})A=AP$$

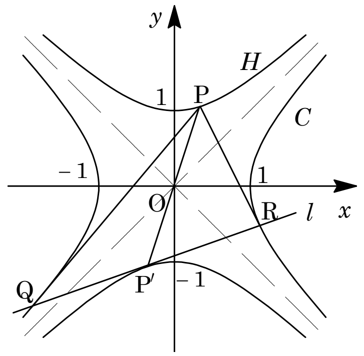
これより，行列 C によって表される移動は，x 軸に関する対称移動を行った後，原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転することに等しい。すなわち，平面上の任意の点 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は $\left(r\cos\left(-\theta+\dfrac{\pi}{3}\right),\ r\sin\left(-\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ に移される。よって，行列 C は直線 $y=\left(\tan\dfrac{\pi}{6}\right)x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関する対称移動を表し，$k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

［解 説］

計算だけで押し進めることもできますが，設問の流れから，出題者の意図は上記のようだと忖度はしたものの……。

6

問題のページへ



(1)　$C: x^2-y^2=1$ ……①，$H: x^2-y^2=-1$ ……②

に対して，H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の原点対称の点を $\mathrm{P}'(-s,\ -t)$ とおくと，P' における H の接線の方程式は，

$$-sx-(-t)y=-1,\ \ sx-ty=1 \text{………③}$$

よって，直線 $l: sx-ty=1$ は点 P を通らない。

(2)　①③を連立して，$x^2-\dfrac{1}{t^2}(sx-1)^2=1$ となり，

$$(t^2-s^2)x^2+2sx-t^2-1=0$$

点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は H 上の点から，$s^2-t^2=-1$ ……④となり，

$$x^2+2sx-t^2-1=0 \text{………⑤}$$

⑤は，$D/4=s^2+t^2+1>0$ となるので，異なる 2 実数解をもつ。すなわち，直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わる。

そこで，⑤の解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，$\mathrm{Q}\left(\alpha,\ \dfrac{s}{t}\alpha-\dfrac{1}{t}\right)$，$\mathrm{R}\left(\beta,\ \dfrac{s}{t}\beta-\dfrac{1}{t}\right)$ と表せ，

$$\alpha+\beta=-2s,\ \ \frac{\alpha+\beta}{2}=-s$$

これより，線分 QR の中点は P' となり，△PQR の重心 G は線分 PP' を $2:1$ に内分する点である。

よって，$\mathrm{G}\left(\dfrac{-2s+s}{3},\ \dfrac{-2t+t}{3}\right)$ から，$\mathrm{G}\left(\dfrac{-s}{3},\ \dfrac{-t}{3}\right)$ である。

(3)　$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{1}{2}\left|\alpha\left(\dfrac{s}{t}\beta-\dfrac{1}{t}\right)-\beta\left(\dfrac{s}{t}\alpha-\dfrac{1}{t}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\beta-\alpha}{t}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{s^2+t^2+1}}{|t|}$

④より，$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{\sqrt{t^2-1+t^2+1}}{|t|}=\dfrac{\sqrt{2t^2}}{|t|}=\sqrt{2}$

以上より，$\triangle\mathrm{GQR}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ となり，点 P の位置によらず一定の値をとる。

［解　説］

(1)は普通に連立して計算をしてもよいのですが，直線 l の方程式が，いかにも意味ありげなので工夫をしました。そして，図形的に結論を記しています。