1

解答解説のページへ

$f(x)$，$g(t)$ を

$$f(x)=x^3-x^2-2x+1,\ \ g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$$

とおく。

(1)　$2g(t)-1=f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，$2g(\theta)\cos\theta=1+\cos\theta-2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

n は自然数とする。

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　媒介変数 t によって,

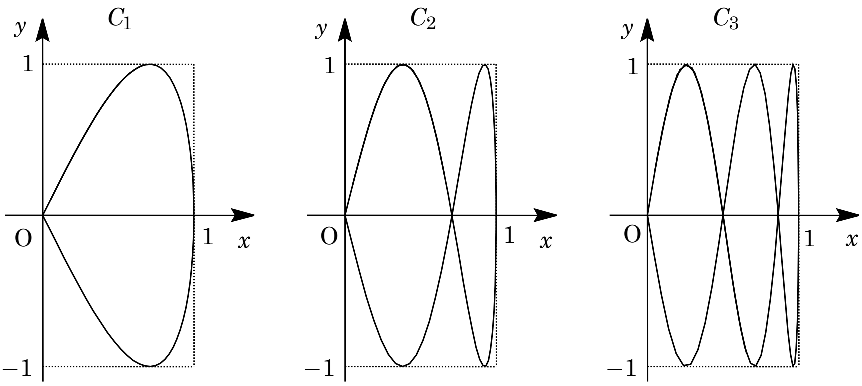
$x = \sin t$，$y = \sin 2nt$　$(0 \leqq t \leqq \pi)$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}} - 1\right) \quad (n \geqq 2)$$

を用いてよい。

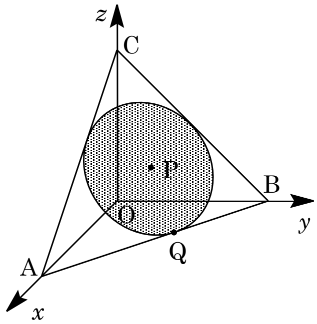
(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。



3

解答解説のページへ

xyz 空間において，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面上にあり，正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P，円板 D と辺 AB の接点を Q とする。



(1)　点 P と点 Q の座標を求めよ。

(2)　円板 D が平面 $z=t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ。

(3)　円板 D と平面 $z=t$ の共通部分が線分であるとき，その線分の長さを t を用いて表せ。

(4)　円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

4

解答解説のページへ

3 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が

$$a_{n+1}=-b_n-c_n,\ b_{n+1}=-c_n-a_n,\ c_{n+1}=-a_n-b_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

および$a_1=a$，$b_1=b$，$c_1=c$を満たすとする。ただし，a, b, cは定数とする。

(1)　$p_n=a_n+b_n+c_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与えられる数列$\{p_n\}$の初項から第 n 項までの和S_nを求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与えられる数列$\{q_n\}$の初項から第 $2n$ 項までの和をT_nとする。$a+b+c$が奇数であれば，すべての自然数 n に対してT_nが正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

5

解答解説のページへ

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。ただし，a, b, c, d は実数とする。

(1)　$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ。

(2)　$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ。

(3)　(2)で求めた A のそれぞれについて $A+A^2+A^3+\cdots+A^{2013}$ を求めよ。

6

解答解説のページへ

楕円 $C: \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の，直線 $y=mx$ と平行な 2 接線を l_1，l_1' とし，l_1，l_1' に直交する C の 2 接線を l_2，l_2' とする。

(1)　l_1，l_1' の方程式を m を用いて表せ。

(2)　l_1 と l_1' の距離 d_1 および l_2 と l_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし，平行な 2 直線 l，l' の距離とは，l 上の 1 点と直線 l' の距離である。

(3)　$(d_1)^2+(d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

(4)　l_1，l_1'，l_2，l_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-x^2-2x+1$，$g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$ に対し，

$$2g(t)-1=2\cos 3t-2\cos 2t+2\cos t-1$$
$$=2(4\cos^3 t-3\cos t)-2(2\cos^2 t-1)+2\cos t-1$$
$$=8\cos^3 t-4\cos^2 t-4\cos t+1=f(2\cos t)$$

(2)　$h(\theta)=2g(\theta)(\cos\theta+1)$ とおくと，

$$h(\theta)=2(\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)(\cos\theta+1)$$
$$=2(\cos 3\theta\cos\theta-\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)$$
$$=\cos 4\theta+\cos 2\theta-\cos 3\theta-\cos\theta+1+\cos 2\theta+2(\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)$$
$$=\cos 4\theta+\cos 3\theta+\cos\theta+1$$

ここで，$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，

$$\cos 4\theta+\cos 3\theta=\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi=-\cos\frac{3}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi=0$$

よって，$h(\theta)=\cos\theta+1$ となり，$2g(\theta)\cos\theta+2g(\theta)=\cos\theta+1$ から，

$$2g(\theta)\cos\theta=1+\cos\theta-2g(\theta)$$

(3)　(2)より，$2g(\theta)(\cos\theta+1)=\cos\theta+1$ であり，$\cos\theta+1\neq 0$ より $2g(\theta)=1$

すると，(1)より $f(2\cos\theta)=0$ となり，$2\cos\theta=2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は $f(x)=0$ の解である。

［解　説］

三角関数の計算はやや難しいものの，誘導に従えば，(3)の結論へとスムーズにつながります。

2

問題のページへ

(1) $I_k=\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin 2nt\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\{\sin(2n+1)t+\sin(2n-1)t\}dt$ とおくと，

$$I_k=-\frac{1}{2}\Big[\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\Big]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}-\frac{1}{2}\Big[\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\Big]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}$$

$$=-\frac{\cos\frac{2n+1}{2n}k\pi-\cos\frac{2n+1}{2n}(k-1)\pi}{2(2n+1)}-\frac{\cos\frac{2n-1}{2n}k\pi-\cos\frac{2n-1}{2n}(k-1)\pi}{2(2n-1)}$$

ここで，$\cos\frac{2n\pm1}{2n}k\pi=\cos\Big(k\pi\pm\frac{k}{2n}\pi\Big)=(-1)^k\cos\frac{k}{2n}\pi$ より，

$$I_k=-\frac{(-1)^k\cos\frac{k}{2n}\pi+(-1)^k\cos\frac{k-1}{2n}\pi}{2(2n+1)}-\frac{(-1)^k\cos\frac{k}{2n}\pi+(-1)^k\cos\frac{k-1}{2n}\pi}{2(2n-1)}$$

$$=(-1)^{k+1}\Big\{\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{1}{2(2n-1)}\Big\}\Big(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\Big)$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\Big(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\Big)$$

(2) C_n： $x=\sin t$，$y=\sin 2nt$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ に対して，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと，

$$f(\pi-t)=\sin(\pi-t)=\sin t=f(t)$$

$$g(\pi-t)=\sin(2n\pi-2nt)=-\sin 2nt=-g(t)$$

これより，曲線 C_n の $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分と $\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ の部分は x 軸対称になる。

さて，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ において $f(t)=\sin t$ は単調に増加し，また $g(t)=\sin 2nt=0$ とすると，k を整数として $2nt=k\pi$，$t=\frac{k}{2n}\pi$ である。

これより，曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n は，

$$\frac{S_n}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|g(t)|f'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2nt|\cos t\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}|\sin 2nt|\cos t\,dt$$

ここで，区間 $\frac{k-1}{2n}\pi\leqq t\leqq\frac{k}{2n}\pi$ において，$g(t)=\sin 2nt$ の符号は変わらないので，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}|\sin 2nt|\cos t\,dt=\sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin 2nt\cos t\,dt\Big|=\sum_{k=1}^{n}|I_k|$$

(1)より，$|I_k|=\frac{2n}{4n^2-1}\Big(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\Big)$ であり，

$$\frac{S_n}{2}=\sum_{k=1}^{n}|I_k|=\frac{2n}{4n^2-1}\sum_{k=1}^{n}\Big(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\Big)$$

そこで，与えられた関係式 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\Big)$ を利用すると，

$$S_n=\frac{4n}{4n^2-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\right)+\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{4n}{4n^2-1}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}$$

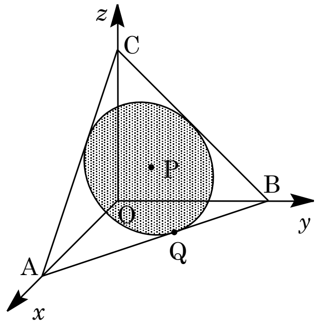
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{4n^2-1}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{16n^2}{\pi(4n^2-1)}\cdot\frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan\frac{\pi}{4n}}=\frac{4}{\pi}$

［解 説］

問題に曲線が示してありますが，これがヒントとなっています。(2)において，積分区間を分割し，絶対値を積分の外側に出すことへの誘導です。なお，2 題続けての三角関数ですが，本問の方が計算に時間がかかります。

3

問題のページへ



(1)　点 P は△ABC の重心，点 Q は辺 AB の中点より，

$$P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ Q\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

(2)　$PQ^2=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{6}$ であるので，

点 P を中心とし半径 PQ の球面およびその内部は，

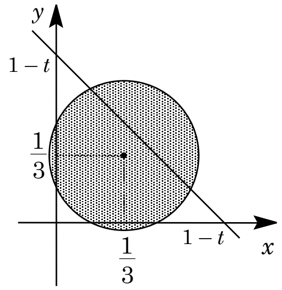
$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots①$$

3 点 A, B, C を通る平面は，$x+y+z=1$ ………②

これより，円板 D は，①と②の連立式として表される。

さて，円板 D と平面 $z=t$ ……③が共有点をもつ条件は，

③と①②を連立して，



$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\frac{1}{6}-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2,\ x+y=1-t$$

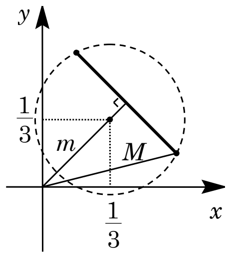
すると，平面 $z=t$ 上で，点 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ と直線 $x+y=1-t$

の距離 $\dfrac{\left|\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-1+t\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|t-\frac{1}{3}\right|$ が，半径 $\sqrt{\frac{1}{6}-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2}$

以下であることから，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|t-\frac{1}{3}\right|\leqq\sqrt{\frac{1}{6}-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2},\ \left(t-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\frac{1}{3}-2\left(t-\frac{1}{3}\right)^2,\ \left(t-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\frac{1}{9}$$

よって，$-\frac{1}{3}\leqq t-\frac{1}{3}\leqq\frac{1}{3}$ より，$0\leqq t\leqq\frac{2}{3}$ となる。



(3)　(2)のとき，共通部分の線分の長さを l とすると，

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2=\left\{\frac{1}{6}-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2\right\}-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{3}\right)^2=t-\frac{3}{2}t^2$$

よって，$l=2\sqrt{t-\frac{3}{2}t^2}$ である。

(4)　平面 $z=t$ 上で，共通部分の線分を z 軸のまわりに回転した

ときできるドーナツ形の外径を M，内径を m とし，その面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=\pi(M^2-m^2)=\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2=\pi\left(t-\frac{3}{2}t^2\right)$$

よって，円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\int_0^{\frac{2}{3}}\pi\left(t-\frac{3}{2}t^2\right)dt=-\frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{2}{3}}t\left(t-\frac{2}{3}\right)dt=\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{27}\pi$$

［解 説］

平面図形の回転体の体積を求める有名題です。空間図形の方程式を利用しています。

4　　　問題のページへ

(1)　条件より，$a_1=a$，$b_1=b$，$c_1=c$ であり，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ において，

$$a_{n+1}=-b_n-c_n\,,\ \ b_{n+1}=-c_n-a_n\,,\ \ c_{n+1}=-a_n-b_n$$

さて，$p_n=a_n+b_n+c_n$ とすると，$p_1=a+b+c$ であり，

$$p_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=-2(a_n+b_n+c_n)=-2p_n$$

よって，$p_n=p_1(-2)^{n-1}=(a+b+c)(-2)^{n-1}$ となり，第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n=\frac{(a+b+c)\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^n\}$$

(2)　(1)より，$a_{n+1}=-b_n-c_n=a_n-p_n$ となり，$n\geqq 2$ において，

$$a_n=a_1-\sum_{k=1}^{n-1}p_k=a-\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}\ \ (n=1\text{のときも成立})$$

同様にして，$b_n=b-\dfrac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}$，$c_n=c-\dfrac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}$

(3)　$q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}$，$T_n=\displaystyle\sum_{l=1}^{2n}q_l$ に対し，$a+b+c$ が奇数のとき，すべての自然数 n において T_n は正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$T_1=q_1+q_2$ より，

$$\begin{aligned}T_1&=-(a_1)^2-(b_1)^2-(c_1)^2+(a_2)^2+(b_2)^2+(c_2)^2\\&=-a^2-b^2-c^2+(-b-c)^2+(-c-a)^2+(-a-b)^2\\&=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab=(a+b+c)^2\end{aligned}$$

よって，T_1 は正の奇数である。

(ii)　$n=k$ のとき　T_k が正の奇数であると仮定すると，

$$\begin{aligned}T_{k+1}&=T_k+q_{2k+1}+q_{2k+2}\\&=T_k-(a_{2k+1})^2-(b_{2k+1})^2-(c_{2k+1})^2+(a_{2k+2})^2+(b_{2k+2})^2+(c_{2k+2})^2\\&=T_k+(a_{2k+1}+b_{2k+1}+c_{2k+1})^2=T_k+(p_{2k+1})^2\end{aligned}$$

ここで，(1)から，$(p_{2k+1})^2=\{(a+b+c)(-2)^{2k}\}^2=(a+b+c)^2\cdot 16^k$ となり，$(p_{2k+1})^2$ は正の偶数であるので，T_{k+1} は正の奇数となる。

(i)(ii)より，すべての自然数 n において T_n は正の奇数である。

［解 説］

連立漸化式の基本的な問題です。ただ，出現する文字が多く，気疲れしてしまいます。(3)は，証明ですが，やや省略気味に記しています。

5

問題のページへ

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のとき，$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$となり，$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$とすると，

$$a^2+bc=0\cdots\cdots\cdots①,\ b(a+d)=1\cdots\cdots\cdots②$$

$$c(a+d)=1\cdots\cdots\cdots③,\ bc+d^2=0\cdots\cdots\cdots④$$

②③より，$(b-c)(a+d)=0$となり，②から$a+d\neq 0$なので，$b=c$

①に代入すると，$a^2+b^2=0$から$a=b=0$となるが，これは②を満たさない。

よって，$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$を満たす$A$は存在しない。

(2) (1)と同様にして，$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$から，

$$a^2+bc=0\cdots\cdots\cdots⑤,\ b(a+d)=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

$$c(a+d)=-1\cdots\cdots\cdots⑦,\ bc+d^2=0\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑥⑦より，$(b+c)(a+d)=0$となり，⑥から$a+d\neq 0$なので，$c=-b\cdots\cdots\cdots⑨$

⑨を⑤に代入すると，$a^2-b^2=0$から，$b=\pm a\cdots\cdots\cdots⑩$

⑤⑧より，$a^2-d^2=0$となり，$a+d\neq 0$から，$d=a\cdots\cdots\cdots⑪$

⑪を⑥に代入すると$2ab=1$となり，⑩から$b=a$だけが適し，⑨⑪から，

$$a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ c=\mp\frac{1}{\sqrt{2}},\ d=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad（複号同順）$$

よって，$A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$である。

(3) Eを単位行列，Oを零行列とすると，$(A^2)^2+E=O$から，$A^4=-E$，$A^8=E$となり，これより，$A^5=-A$，$A^6=-A^2$，$A^7=-A^3$に注意して，

$$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7+A^8=O$$

そこで，$S=A+A^2+A^3+\cdots+A^{2013}$とおくと，$2008=8\times 251$から，

$$S=A^{2009}+A^{2010}+A^{2011}+A^{2012}+A^{2013}=A+A^2+A^3-E-A$$

$$=A^2+A^3-E=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

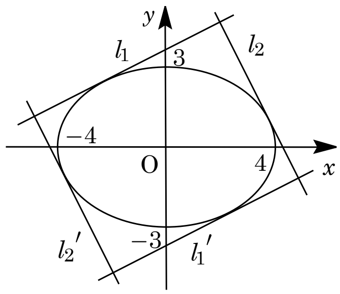
［解 説］

行列の成分に関する計算問題です。なお，(2)の行列Aは原点を中心とする$-45°$または$135°$の回転を表します。これが(3)への誘導となっています。

6

問題のページへ

(1) $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ から，$9x^2+16y^2=9\cdot16$ ………①



直線 $y=mx$ に平行な直線を $y=mx+n$ ……②とおき，①に代入すると，

$$9x^2+16(mx+n)^2=9\cdot16$$

$$(9+16m^2)x^2+32mnx+16n^2-9\cdot16=0$$

①②が接することより，

$$D/4=16^2m^2n^2-(9+16m^2)(16n^2-9\cdot16)=0$$

$$16m^2n^2-(9+16m^2)(n^2-9)=0,\quad n^2-9-16m^2=0$$

よって，$n=\pm\sqrt{16m^2+9}$ から，l_1，l_1' の方程式は，$y=mx\pm\sqrt{16m^2+9}$

(2) 原点と l_1，l_1' の距離はともに $\dfrac{\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}$ なので，l_1 と l_1' の距離 d_1 は,

$$d_1=\frac{2\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，l_2 と l_2' の距離 d_2 は，$m\neq0$ のとき，③において m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換え,

$$d_2=\frac{2\sqrt{16\left(-\frac{1}{m}\right)^2+9}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2+1}}=\frac{2\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

なお，$m=0$ のときは $d_2=8$ となるが，このときも④は成立している。

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2=\dfrac{4(16m^2+9)}{m^2+1}+\dfrac{4(9m^2+16)}{m^2+1}=100$

(4) l_1，l_1'，l_2，l_2' で囲まれる長方形の面積 S は，$S=d_1d_2=d_1\sqrt{100-(d_1)^2}$

ここで，$d_1=t$ とおくと，$6\leqq t<8$ となり,

$$S=t\sqrt{100-t^2}=\sqrt{100t^2-t^4}=\sqrt{-(t^2-50)^2+2500}$$

よって，$36\leqq t^2<64$ から，$t^2=50$ のとき S は最大値 $\sqrt{2500}=50$ をとる。

［解 説］

楕円の有名問題です。誘導が非常に細かく付いています。