1

解答解説のページへ

$f(x)=x^3-x$ とする。$y=f(x)$ のグラフに点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた接線は 3 本あるとする。3 つの接点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\gamma,\ f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする。

(1)　$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　点 G の座標を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　点 G の x 座標が正で，y 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ。

2

解答解説のページへ

xy 平面上の曲線 $C: y = x\sin x + \cos x - 1\ (0 < x < \pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。ただし $3 < \pi < \dfrac{16}{5}$ であることは証明なしで用いてよい。

(1) 曲線 C と x 軸の交点はただ 1 つであることを示せ。

(2) 曲線 C と x 軸の交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$ とする。$\alpha > \dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ。

(3) 曲線 C, y 軸および直線 $y = \dfrac{\pi}{2} - 1$ で囲まれる部分の面積を S とする。また，xy 平面の原点 O，点 A および曲線 C 上の点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} - 1\right)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を T とする。$S < T$ であることを示せ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x>0$ で考える。$y=f(x)$ のグラフの点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_a とし，l_a と y 軸との交点を $(0,\ Y(a))$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，実数 k に対して $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t}=0$ であることは証明なしで用いてよい。

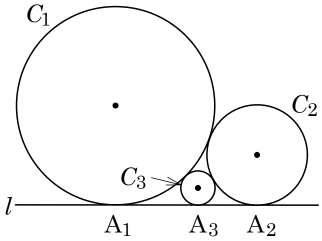
(1)　$Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$0<a<b$ である $a,\ b$ に対して，l_a と l_b が x 軸上で交わるとき，a のとりうる値の範囲を求め，b を a で表せ。

(3)　(2)の $a,\ b$ に対して，$Z(a)=Y(a)-Y(b)$ とおく。$\displaystyle\lim_{a\to+0} Z(a)$ および $\displaystyle\lim_{a\to+0} \frac{Z'(a)}{a}$ を求めよ。

4

解答解説のページへ



平面上の直線 l に同じ側で接する 2 つの円 C_1，C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している。l，C_1，C_2 で囲まれた領域内に，これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。同様に l，C_n，C_{n+1} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で囲まれた領域内にあり，これら 3 つと互いに接する円を C_{n+2} とする。円 C_n の半径を r_n とし，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$r_1=16$，$r_2=9$ とする。

(1) l が C_1，C_2，C_3 と接する点を，それぞれ A_1，A_2，A_3 とおく。線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の長さおよび r_3 の値を求めよ。

(2) ある定数 a，b に対して $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを示せ。a, b の値も求めよ。

(3) (2)で求めた a，b に対して，2 次方程式 $t^2=at+b$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とする。$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$ を満たす有理数 c，d の値を求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。

(4) (3)の c，d，α，β に対して，$x_n=c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを示し，数列 $\{r_n\}$ の一般項を α，β を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

実数を成分とする正方行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　$AB=BA$ を満たす A は，実数 x, y を用いて $A=xB+yE$ と表せることを示せ。

(2)　$A^3=E$ のとき，$(t^2-\mathit{\Delta})A=(t\mathit{\Delta}+1)E$ を示せ。ただし，$t=a+d$，$\mathit{\Delta}=ad-bc$ とする。

(3)　$AB=BA$ かつ $A^3=E$ を満たす A をすべて求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

xy 平面上に楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1\ (a>\sqrt{13})$，および双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ があり，C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする。また C_1 と C_2 の交点 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t>0)$ における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1)　a と b の間に成り立つ関係式を求め，点 P の座標を a を用いて表せ。

(2)　l_1 と l_2 が直交することを示せ。

(3)　a が $a>\sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-x$ に対し，$f'(x)=3x^2-1$ となり，点 $(t,\ t^3-t)$ における接線は，

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)\,,\ \ y=(3t^2-1)x-2t^3$$

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通ることより，$b=(3t^2-1)a-2t^3$，$2t^3-3at^2+a+b=0$ ………①

ここで，$g(t)=2t^3-3at^2+a+b$ とおくと，$g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$ となり，

条件より，t についての 3 次方程式①が，異なる 3 実数解をもつことから，

$$a\neq 0\,,\ \ g(0)\cdot g(a)=(a+b)(-a^3+a+b)<0 \text{ ………②}$$

②のもとで，①の 3 つの実数解が $t=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ なので，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}a\,,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\,,\ \ \alpha\beta\gamma=-\frac{a+b}{2}$$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ とおくと，(1)より，$x=\dfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{1}{2}a$ ………③

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{3}(\alpha^3-\alpha+\beta^3-\beta+\gamma^3-\gamma)\\&=\frac{1}{3}\{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)\}\\&=\frac{1}{3}\Big\{\frac{3}{2}a\Big(\frac{9}{4}a^2-3\cdot 0\Big)-3\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{3}{2}a\Big\}=\frac{9}{8}a^3-a-\frac{1}{2}b \text{ ………④}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{G}\Big(\dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{9}{8}a^3-a-\dfrac{1}{2}b\Big)$ となる。

(3)　条件から，③④について，$\dfrac{1}{2}a>0$ かつ $\dfrac{9}{8}a^3-a-\dfrac{1}{2}b<0$ となり，

$$a>0 \text{ ………⑤},\ \ b>\frac{9}{4}a^3-2a \text{ ………⑥}$$

そこで，②⑤⑥の共通部分を求めるために，$a+b=0$ と $b=\dfrac{9}{4}a^3-2a$ を連立して，

$$-a=\frac{9}{4}a^3-2a\,,\ \ 9a^3-4a=0$$

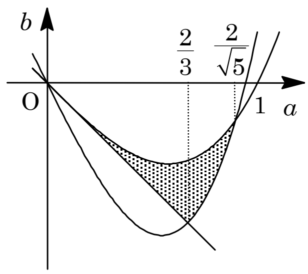
$a>0$ より，$a=\dfrac{2}{3}$ となる。

また，$-a^3+a+b=0$ と $b=\dfrac{9}{4}a^3-2a$ を連立し，

$$a^3-a=\frac{9}{4}a^3-2a\,,\ \ 5a^3-4a=0$$

$a>0$ より，$a=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となる。

よって，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲は右図の網点部である。ただし，境界は含まない。



［解　説］

領域の図示をテーマとした標準的な問題です。ただ，記述量は非常に多いため，上の解答例では，3 次曲線の概形については省いています。

2

問題のページへ

(1)　$C : y = x\sin x + \cos x - 1\ (0 < x < \pi)$ に対して，

$$y' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$$

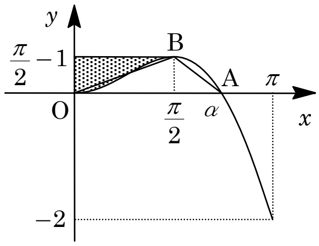
すると，y の増減は右表のようになり，曲線 C と x 軸は，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ において，ただ 1 つの交点をもつ。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	-2

(2)　$x = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$3 < \pi < \dfrac{16}{5}$ から，

$$y = \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{3}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3 - \frac{3}{2} = \sqrt{3} - \frac{3}{2} > 0$$

よって，曲線 C と x 軸の交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$ とすると，$\alpha > \dfrac{2}{3}\pi$ である。



(3)　曲線 C，y 軸および直線 $y = \dfrac{\pi}{2} - 1$ で囲まれる網点部の面積 S は，

$$S = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x + \cos x - 1)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) + \Big[\,x\cos x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx - \Big[\,\sin x - x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - 1 - 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

また，原点 O，点 A および点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}-1\right)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 T は，

$$T = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

すると，(2)より，$\alpha > \dfrac{2}{3}\pi$ なので，

$$T - S = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - \frac{\pi^2}{4} + 2 > \frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - \frac{\pi^2}{4} + 2 = -\frac{\pi}{12}(\pi+4) + 2$$

さらに，$3 < \pi < \dfrac{16}{5}$ から，$T - S > -\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{16}{5}\left(\dfrac{16}{5}+4\right) + 2 = \dfrac{2}{25} > 0$

よって，$S < T$ である。

［解　説］

微積分の基本問題です。評価式が複数ありますが，どれも見通しはよいものです。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ に対して，$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ となり，点 $(a,\ f(a))$ における接線 l_a は，

$$y-e^{-\frac{a^2}{2}}=-ae^{-\frac{a^2}{2}}(x-a),\ \ y=-ae^{-\frac{a^2}{2}}x+(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

l_a と y 軸との交点を $(0,\ Y(a))$ とすると，$Y(a)=(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$ となり，

$$Y'(a)=2ae^{-\frac{a^2}{2}}-(a^2+1)ae^{-\frac{a^2}{2}}$$
$$=-a(a-1)(a+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$a>0$ において，$Y(a)$ の増減は右表のようになり，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}Y(a)=\lim_{a\to\infty}(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}=0$ から，

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$Y'(a)$	0	$+$	0	$-$
$Y(a)$	1	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘

$$0<Y(a)\leqq\frac{2}{\sqrt{e}}$$

(2)　l_a と x 軸との交点は，$(*)$から，$0=-ae^{-\frac{a^2}{2}}x+(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$ となり，

$$x=\frac{a^2+1}{a}=a+\frac{1}{a}$$

同様に，l_b と x 軸との交点は $x=b+\frac{1}{b}$ となり，条件より，$a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}$

$$b-a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=0,\ \ (b-a)\Big(1-\frac{1}{ab}\Big)=0$$

$0<a<b$ から，$1-\frac{1}{ab}=0$ すなわち $b=\frac{1}{a}$ であり，$0<a<1$ となる。

(3)　$Z(a)=Y(a)-Y(b)=(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}-(b^2+1)e^{-\frac{b^2}{2}}$

$a\to+0$ のとき $b\to\infty$ となり，$\displaystyle\lim_{a\to+0}Z(a)=1-0=1$

また，$Z'(a)=-a(a-1)(a+1)e^{-\frac{a^2}{2}}+b(b-1)(b+1)e^{-\frac{b^2}{2}}\cdot\dfrac{db}{da}$

すると，$\dfrac{db}{da}=-\dfrac{1}{a^2}=-b^2$ から，

$$Z'(a)=-a(a-1)(a+1)e^{-\frac{a^2}{2}}-b^3(b-1)(b+1)e^{-\frac{b^2}{2}}$$

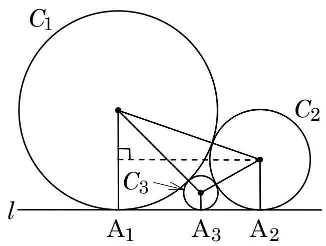
よって，$\dfrac{Z'(a)}{a}=-(a-1)(a+1)e^{-\frac{a^2}{2}}-b^4(b-1)(b+1)e^{-\frac{b^2}{2}}$ から，

$$\lim_{a\to+0}\frac{Z'(a)}{a}=1-0=1$$

［解　説］

本問も計算量の多い問題です。$\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^ke^{-t}=0$ の適用については，やや雑な記述となっています。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ



(1)　右図より，$A_1A_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$

となり，同様に，

$$A_1A_3=2\sqrt{r_1r_3},\ A_2A_3=2\sqrt{r_2r_3}$$

ここで，$A_1A_2=A_1A_3+A_2A_3$ より，

$$2\sqrt{r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_3}+2\sqrt{r_2r_3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

$r_1=16$，$r_2=9$ なので，①から，

$$2\cdot4\cdot3=2\cdot4\sqrt{r_3}+2\cdot3\sqrt{r_3},\ \sqrt{r_3}=\frac{12}{7}$$

よって，$r_3=\dfrac{144}{49}$，$A_1A_2=24$，$A_1A_3=\dfrac{96}{7}$，$A_2A_3=\dfrac{72}{7}$

(2)　①と同様にして，$2\sqrt{r_nr_{n+1}}=2\sqrt{r_nr_{n+2}}+2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$

両辺を $2\sqrt{r_nr_{n+1}r_{n+2}}$ で割って，$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ となり，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ から，

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

条件より，$x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ なので，$a=b=1$

(3)　2 次方程式 $t^2=t+1$ の解を α，$\beta\ (\alpha>\beta)$ とすると，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$

ここで，$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$ から，$\dfrac{1}{4}=c\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^2+d\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^2$ となり，

$$1=c(6+2\sqrt5)+d(6-2\sqrt5)$$

c, d が有理数，$\sqrt5$ が無理数なので，$6c+6d=1\cdots\cdots③$，$2c-2d=0\cdots\cdots④$

③④より，$c=d=\dfrac{1}{12}$

(4)　$x_n=\dfrac{1}{12}\alpha^{n+1}+\dfrac{1}{12}\beta^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　$n=1$ のときは(3)より成立し，

$$\frac{1}{12}\alpha^3+\frac{1}{12}\beta^3=\frac{1}{12}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^3+\frac{1}{12}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^3=\frac{1}{12}\cdot\frac{2(1+15)}{8}=\frac{1}{3}$$

すると，$x_2=\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}=\dfrac{1}{3}$ より，$n=2$ のときも成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$x_k=\dfrac{1}{12}\alpha^{k+1}+\dfrac{1}{12}\beta^{k+1}$，$x_{k+1}=\dfrac{1}{12}\alpha^{k+2}+\dfrac{1}{12}\beta^{k+2}$ と仮定すると，②より，

$$x_{k+2}=x_{k+1}+x_k=\frac{1}{12}\alpha^{k+2}+\frac{1}{12}\beta^{k+2}+\frac{1}{12}\alpha^{k+1}+\frac{1}{12}\beta^{k+1}$$

$$=\frac{1}{12}\alpha^{k+1}(\alpha+1)+\frac{1}{12}\beta^{k+1}(\beta+1)=\frac{1}{12}\alpha^{k+1}\cdot\frac{3+\sqrt5}{2}+\frac{1}{12}\beta^{k+1}\cdot\frac{3-\sqrt5}{2}$$

$$=\frac{1}{12}\alpha^{k+1}\cdot\alpha^2+\frac{1}{12}\beta^{k+1}\cdot\beta^2=\frac{1}{12}\alpha^{k+3}+\frac{1}{12}\beta^{k+3}$$

よって，$n=k+2$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$x_n=\dfrac{1}{12}\alpha^{n+1}+\dfrac{1}{12}\beta^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

さらに，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ から，$r_n=\dfrac{1}{{x_n}^2}=\dfrac{144}{(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})^2}$ である。

［解 説］

有名な構図の問題で，本年度は名大・理系で出題されています。ただ，筑波大では，良くも悪くも，誘導が丁寧です。

$\boxed{5}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$AB = BA$ より，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ となり，

$a - b = a + c$ ………①，$a + 2b = b + d$ ………②

$c - d = -a + 2c$ ………③，$c + 2d = -b + 2d$ ………④

①より $-b = c$ ……⑤となり，このとき④は成立する。

②より $a + b = d$ ……⑥となり，このとき③は $-b - a - b = -a - 2b$ から成立する。

⑤⑥より，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = bB + (a-b)E$

よって，$x = b$，$y = a - b$ とおくと，$A = xB + yE$ と表せる。

(2)　ハミルトン・ケーリーの定理より，$A^2 = tA - \varDelta E$ となり，

$A^3 = tA^2 - \varDelta A = t(tA - \varDelta E) - \varDelta A = (t^2 - \varDelta)A - t\varDelta E$

すると，$A^3 = E$ より，$(t^2 - \varDelta)A - t\varDelta E = E$ となり，$(t^2 - \varDelta)A = (t\varDelta + 1)E$

(3)　(i)　$t^2 - \varDelta = 0$ のとき　(2)より $t\varDelta + 1 = 0$ となり，$t^3 + 1 = 0$ から，

$t = a + d = -1$ ………⑦，$\varDelta = ad - bc = 1$ ………⑧

⑤⑥を代入すると，$2a + b = -1$ ……⑨，$a^2 + ab + b^2 = 1$ ……⑩

⑨⑩より，$a^2 + a(-1-2a) + (-1-2a)^2 = 1$，$3a^2 + 3a = 0$ となり，

$a = 0,\ -1$

よって，$(a,\ b,\ c,\ d) = (0,\ -1,\ 1,\ -1)$ または $(-1,\ 1,\ -1,\ 0)$

(ii)　$t^2 - \varDelta \neq 0$ のとき　(2)より $A = \dfrac{t\varDelta + 1}{t^2 - \varDelta}E = kE$ （k は実数）

すると，$A^3 = E$ から，$k^3E = E$ となり，$k = 1$ すなわち $A = E$ である。

このとき，$AB = BA$ は成立する。

(i)(ii)より，$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

［解　説］

行列の演算についての典型題です。連立方程式をまとめていく力が問われています。

6

問題のページへ

(1)　楕円 $C_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1\ (a>\sqrt{13})$ ……①の焦点の座標は $(\pm\sqrt{a^2-9},\ 0)$ であり，

双曲線 $C_2: \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ ……②の焦点の座標は $(\pm\sqrt{4+b^2},\ 0)$ である。

条件より，$\sqrt{a^2-9}=\sqrt{4+b^2}$ から，$a^2-9=4+b^2$，$a^2-b^2=13$ ……③

また，C_1 と C_2 の第 1 象限の交点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は，①②より，

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{9}=1\ \cdots\cdots④,\quad \frac{s^2}{4}-\frac{t^2}{b^2}=1\ \cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$9s^2+a^2t^2=9a^2$，$b^2s^2-4t^2=4b^2$ となり，

$$\begin{pmatrix}9 & a^2\\ b^2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s^2\\ t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9a^2\\ 4b^2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}s^2\\ t^2\end{pmatrix}=\frac{1}{-36-a^2b^2}\begin{pmatrix}-4 & -a^2\\ -b^2 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9a^2\\ 4b^2\end{pmatrix}$$

③を代入すると，

$$\begin{pmatrix}s^2\\ t^2\end{pmatrix}=\frac{1}{36+a^2b^2}\begin{pmatrix}36a^2+4a^2b^2\\ 9a^2b^2-36b^2\end{pmatrix}=\frac{1}{36+a^2(a^2-13)}\begin{pmatrix}4a^2(9+a^2-13)\\ 9(a^2-4)(a^2-13)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(a^2-4)(a^2-9)}\begin{pmatrix}4a^2(a^2-4)\\ 9(a^2-4)(a^2-13)\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-9}\begin{pmatrix}4a^2\\ 9(a^2-13)\end{pmatrix}$$

これより，$s=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}}$，$t=\dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}$ となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}},\ \dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}\right)$

(2)　$\mathrm{P}(s,\ t)$ における C_1 の接線 l_1，C_2 の接線 l_2 の法線ベクトルを，それぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ とおくと，$\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{s}{a^2},\ \dfrac{t}{9}\right)$，$\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{s}{4},\ -\dfrac{t}{b^2}\right)$ となり，(1)から，

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\frac{s^2}{4a^2}-\frac{t^2}{9b^2}=\frac{4a^2}{4a^2(a^2-9)}-\frac{9(a^2-13)}{9(a^2-13)(a^2-9)}=0$$

よって，l_1 と l_2 は直交する。

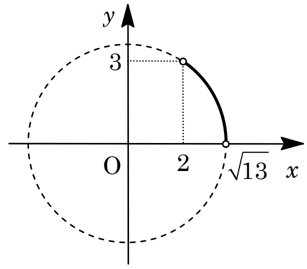
(3)　(1)より，$s^2=\dfrac{4a^2}{a^2-9}=4+\dfrac{36}{a^2-9}$，$t^2=\dfrac{9(a^2-13)}{a^2-9}=9-\dfrac{36}{a^2-9}$

これより，$s^2+t^2=13$

また，$a>\sqrt{13}$ のとき，$0<\dfrac{36}{a^2-9}<9$ より，

$$4<s^2<13\ (2<s<\sqrt{13}),\quad 0<t^2<9\ (0<t<3)$$

よって，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡は右図の実線部である。



［解　説］

計算量は半端ではありません。特に(3)において，1 行目の変形をしなかったときは，たいへんなことになります。