1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面において，次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x^2+y\leqq 1,\ \ x-y\leqq 1$$

(2) 2 つの放物線 $y=x^2-2x+k$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(3) $x,\ y$ が(1)の連立不等式を満たすとき，$y-x^2+2x$ の最大値および最小値と，それらを与える x, y の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が，辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする。また，$\alpha = \angle\mathrm{CAB}$，$\beta = \angle\mathrm{ABC}$ とし，三角形 ABC の面積を S とする。

(1) 線分 AQ の長さを α を用いて表し，線分 QC の長さを β を用いて表せ。

(2) $t = \tan\dfrac{\beta}{2}$ とおく。このとき，S を t を用いて表せ。

(3) 不等式 $S \geqq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。さらに，等号が成立するのは，三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ。

3

解答解説のページへ

p と q は正の整数とする。2 次方程式 $x^2-2px-q=0$ の 2 つの実数解を α，β とする。ただし $\alpha>\beta$ とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\frac{1}{2}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。ただし，$\alpha^0=1$，$\beta^0=1$ と定める。

(1)　すべての自然数 n に対して，$a_{n+2}=2pa_{n+1}+qa_n$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 n に対して，a_n は整数であることを示せ。

(3)　自然数 n に対し，$\dfrac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数を b_n とする。p と q が $q<2p+1$ を満たすとき，b_n を a_n を用いて表せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$f(x)=\log(e^x+e^{-x})$ とおく。曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線を l とする。直線 l と y 軸の交点の y 座標を $b(t)$ とおく。

(1) 次の等式を示せ。$b(t)=\dfrac{2te^{-t}}{e^t+e^{-t}}+\log(1+e^{-2t})$

(2) $x\geqq 0$ のとき，$\log(1+x)\leqq x$ であることを示せ。

(3) $t\geqq 0$ のとき，$b(t)\leqq\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}+e^{-2t}$ であることを示せ。

(4) $b(0)=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{4t}{(e^t+e^{-t})^2}dt$ であることを示せ。

5

解答解説のページへ

$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x),\ \ g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\ \ h(x)=\sin x$$

とおく。3 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$ の $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ を満たす部分を，それぞれ C_1，C_2，C_3 とする。

(1)　C_2 と C_3 の交点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とする。$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(3)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。

6

解答解説のページへ

α を実数でない複素数とし，β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし，複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

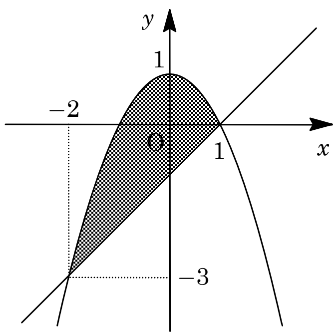
(1)　複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき，C は原点を通る円であることを示せ。

(2)　複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また，その 2 点を P，Q とするとき，線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3)　β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P，Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

1

問題のページへ



(1)　領域 $D : x^2+y \leqq 1$，$x-y \leqq 1$ の境界線は,

$$x^2+y=1 \cdots\cdots\cdots ①,\ x-y=1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立すると，$x^2+x-2=0$ より,

$$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (-2,\ -3)$$

よって，領域 D は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

(2)　$y=x^2-2x+k \cdots\cdots ③$と①を連立すると,

$$x^2-2x+k=-x^2+1,\ 2x^2-2x+k-1=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

共有点をもつことより，$D/4=1-2(k-1) \geqq 0$ となり，$k \leqq \dfrac{3}{2}$ である。

(3)　まず，$y-x^2+2x=k$ とおくと，③と一致する。

そして，③を $y=(x-1)^2+k-1$ と変形すると，軸が $x=1$ の放物線となり，以下，この放物線が領域 D と共有点をもつ k の値の範囲を求める。

すると，k の値の最大値は，(2)から $k=\dfrac{3}{2}$ である。このとき，④より $x=\dfrac{1}{2}$，①より $y=\dfrac{3}{4}$ である。また，k の値が最小となるのは，③が点$(-2,\ -3)$ を通るときで，このとき $k=-11$ となる。

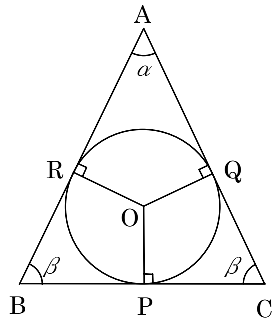
以上より，$y-x^2+2x$ の最大値は $\dfrac{3}{2}\left(x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{4}\right)$ であり，最小値は $-11\ (x=-2,\ y=-3)$ となる。

［解 説］

領域と最大・最小についての基本問題です。細かすぎるほどの誘導がついています。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　二等辺三角形 ABC の半径 1 の内接円の中心を O とおくと，△AOQ において，

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\mathrm{AQ}},\ \ \mathrm{AQ}=\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

△COQ において同様に，$\mathrm{QC}=\dfrac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}$

(2)　まず，$\mathrm{BC}=2\mathrm{PC}=2\mathrm{QC}=\dfrac{2}{\tan\frac{\beta}{2}}=\dfrac{2}{t}$

また, A, O, P は同一直線上にあるので,

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PC}\tan\beta=\mathrm{QC}\tan\beta=\frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2}{1-t^2}$$

よって，△ABC の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AP}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{t}\cdot\dfrac{2}{1-t^2}=\dfrac{2}{t(1-t^2)}$

(3)　$\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\pi-\alpha}{4}$ より $0<\dfrac{\beta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ となり，$0<\tan\dfrac{\beta}{2}<1$ すなわち $0<t<1$ である。

さて，$f(t)=t(1-t^2)$ とおくと，$S=\dfrac{2}{f(t)}$ となり，

$$f'(t)=1-3t^2$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$0<t<1$ において $0<f(t)\leqq\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ であり,

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

$$S\geqq 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

等号が成り立つのは，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のときなので，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$ である。このとき $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ となり，△ABC は正三角形である。

［解　説］

三角比と図形についての基本問題です。加えて，最小値を求めるときに微分法を利用するように構成されています。

3

問題のページへ

(1)　2 次方程式 $x^2-2px-q=0$ の 2 つの実数解を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=2p,\ \alpha\beta=-q\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$a_n=\dfrac{1}{2}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})\cdots\cdots②$より，①を利用すると，

$$2pa_{n+1}+qa_n=(\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta\cdot\frac{1}{2}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\beta^{n+1})-\frac{1}{2}(\alpha^n\beta+\alpha\beta^n)=\frac{1}{2}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$$

よって，$a_{n+2}=2pa_{n+1}+qa_n\cdots\cdots③$が成り立つ。

(2)　$a_1=\dfrac{1}{2}(\alpha^0+\beta^0)=1$，$a_2=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=p$ となり，ともに整数である。

すると，③から帰納的に，すべての自然数 n に対して a_n は整数である。

(3)　$f(x)=x^2-2px-q$ とおくと，条件より，

$$f(0)=-q<0,\ f(-1)=1+2p-q>0$$

これより，$f(x)=0$ の実数解 α，$\beta\ (\alpha>\beta)$ は，$\alpha>0$，$-1<\beta<0$ となる。

②より，$\dfrac{\alpha^{n-1}}{2}=a_n-\dfrac{\beta^{n-1}}{2}\cdots\cdots④$となり，$-1<\beta^{n-1}<1$ から $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{\beta^{n-1}}{2}<\dfrac{1}{2}$

すると，$\dfrac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数 b_n は，

(i)　n が偶数($n-1$ が奇数)のとき　$-\dfrac{1}{2}<\dfrac{\beta^{n-1}}{2}<0$ から，④より $b_n=a_n$ である。

(ii)　n が奇数($n-1$ が偶数)のとき　$0<\dfrac{\beta^{n-1}}{2}<\dfrac{1}{2}$ から，④より $b_n=a_n-1$ である。

［解　説］

隣接 3 項間型の漸化式の標準問題です。(3)の問題文の $q<2p+1$ という意味深な不等式は，グラフを対応させると，β が -1 より大きいことを示しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\log(e^x+e^{-x})$ より $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ となり，曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線 l は，$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ となるので，y 切片 $b(t)$ は，

$$b(t)=f'(t)(-t)+f(t)=-\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}t+\log(e^t+e^{-t})$$

$$=-\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}t+\log e^t(1+e^{-2t})=\frac{-e^t+e^{-t}}{e^t+e^{-t}}t+t+\log(1+e^{-2t})$$

$$=\frac{2te^{-t}}{e^t+e^{-t}}+\log(1+e^{-2t})\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$x\geqq 0$ のとき，$g(x)=x-\log(1+x)$ とおくと，

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}\geqq 0$$

よって，$g(x)\geqq g(0)=0$ となり，$\log(1+x)\leqq x$ ……②である。

(3)　②より $1+x\leqq e^x$ となり，$x\leqq e^x$ から $xe^{-x}\leqq 1$ なので，$\dfrac{2te^{-t}}{e^t+e^{-t}}\leqq\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}$ ………③

また，②より，$\log(1+e^{-2t})\leqq e^{-2t}$ ………④

よって，①③④より，$b(t)\leqq\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}+e^{-2t}$ ………⑤

(4)　$b'(t)=\dfrac{2(e^{-t}-te^{-t})(e^t+e^{-t})-2te^{-t}(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}+\dfrac{-2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$

$$=\frac{2(-2t+1+e^{-2t})}{(e^t+e^{-t})^2}+\frac{-2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\frac{-4t}{(e^t+e^{-t})^2}$$

すると，$\displaystyle\int_0^x\frac{4t}{(e^t+e^{-t})^2}dt=-\int_0^x b'(t)dt=-b(x)+b(0)$ となり，①⑤より，

$$0\leqq b(x)\leqq\frac{2}{e^x+e^{-x}}+e^{-2x}$$

よって，$x\to\infty$ のとき $b(x)\to 0$ となるので，$b(0)=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{4t}{(e^t+e^{-t})^2}dt$

［解　説］

(3)まではスムーズに流れていきます。(4)の証明すべき式の左辺は $b(0)$ なので，①との関連を考え，さらに被積分関数の分母に注目すると，微分という方針が立ちます。しかし，計算に踏み出すには勇気が必要です。

5

問題のページへ

(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$，$h(x) = \sin x$ に対し，$C_2 : y = g(x)$ と $C_3 : y = h(x)$ を連立すると，

$$\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) = \sin x,\quad \cos x = \sin x$$

よって，$x = \dfrac{\pi}{4}$ となり，$y = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

これより，交点の座標は，$\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となる。

(2)　$f(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x - \sin x)$ に対し，$C_1 : y = f(x)$ と $C_3 : y = h(x)$ を連立すると，

$$\frac{1}{2}(\cos x - \sin x) = \sin x,\quad \cos x = 3\sin x$$

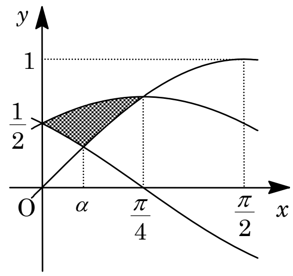
すると，$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ から $10\sin^2 x = 1$ となり，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ から $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$$\cos x = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

よって，C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とすると，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

(3)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を S とおくと，

$$S = \int_0^{\alpha}\{g(x) - f(x)\}dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\{g(x) - h(x)\}dx$$



すると，(2)の結果から，

$$\int_0^{\alpha}\{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^{\alpha}\sin x\,dx = -\bigl[\cos x\bigr]_0^{\alpha}$$
$$= 1 - \cos\alpha = 1 - \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\{g(x) - h(x)\}dx = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}(-\sin x + \cos x)dx = \frac{1}{2}\bigl[\cos x + \sin x\bigr]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{\sqrt{10}}$$

よって，$S = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{10}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{10}} = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

［解　説］

面積計算の基本問題です。計算も複雑ではありません。

6

問題のページへ

(1)　$\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ より，$|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z=0$ となり，$|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+\alpha\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ から，

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=|\alpha|^2,\quad |z-\alpha|^2=|\alpha|^2,\quad |z-\alpha|=|\alpha|$$

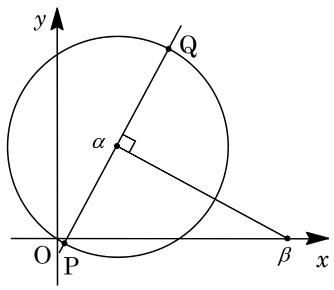
よって，z の描く図形 C は，点 α を中心とし半径が $|\alpha|$ の円である。すなわち，原点を通る円となる。

(2)　α は虚数，β は正の実数より，$\beta-\overline{\alpha}=\overline{\beta-\alpha}$ である。

さて，$w=(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ とおくと，

$$w=(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})=\frac{(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})(\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)}=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}|\beta-\alpha|^2$$

ここで，w は純虚数より，$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数となる。



すると，z の描く図形 L は，点 α を通り，点 α と点 β を結ぶ線分に垂直な直線 $(z\neq\alpha)$ であり，C と L は 2 つの共有点をもつ。この 2 点を P, Q とすると，P, Q は円 C の直径の両端となるので，

$$\mathrm{PQ}=2|\alpha|=2\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$$

(3)　$\mathrm{R}(\beta)$ としたとき，$\mathrm{RP}=\mathrm{RQ}$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形になる条件は，$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{3}|\alpha|,\quad (\beta-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})=3\alpha\overline{\alpha},\quad \beta^2-(\alpha+\overline{\alpha})\beta-2\alpha\overline{\alpha}=0$$

すると，$\beta>0$ より，$\beta=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{(\alpha+\overline{\alpha})^2+8\alpha\overline{\alpha}}}{2}=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{\alpha^2+10\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2}}{2}$

［解　説］

現行課程で復活した複素数と図形の問題です。複素数平面上で，円と直線の表現方法が問われています。