1

解答解説のページへ

　k を実数とする。xy 平面の曲線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ が異なる共有点 P, Q をもつとする。ただし点 P, Q の x 座標は正であるとする。また, 原点を O とする。

(1)　k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　k が(1)の範囲を動くとき, △OPQ の重心 G の軌跡を求めよ。

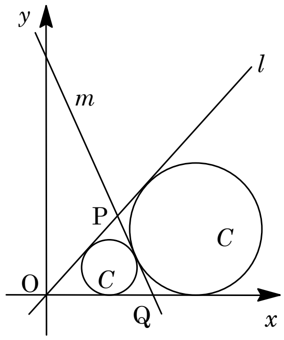
(3)　△OPQ の面積を S とするとき, S^2 を k を用いて表せ。

(4)　k が(1)の範囲を動くとする。△OPQ の面積が最大となるような k の値と, そのときの重心 G の座標を求めよ。

2

解答解説のページへ

xy 平面の直線 $y=(\tan 2\theta)x$ を l とする。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。図で示すように，円 C_1，C_2 を以下の(i)～(iv)で定める。



(i)　円 C_1 は直線 l および x 軸の正の部分と接する。

(ii)　円 C_1 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。

(iii)　円 C_2 は直線 l，x 軸の正の部分，および円 C_1 と接する。

(iv)　円 C_2 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1>d_2$ を満たす。

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，x 軸，直線 l と異なる直線を m とし，直線 m と直線 l，x 軸との交点をそれぞれ P, Q とする。

(1)　円 C_1，C_2 の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

(3)　(2)の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。

3

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。このとき等式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ が成り立つとする。t は実数の定数で，$0<t<1$ を満たすとする。線分 OA を $t:1-t$ に内分する点を P とし，線分 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q とする。また，線分 PQ の中点を M とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と t を用いて表せ。

(2) 線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき，線分 OB の長さを求めよ。

(3) 4 点 O, A, B, C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする。このとき，$\triangle$OAB と $\triangle$OCB は合同であることを示せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}\ (x\geqq 0)$ について次の問いに答えよ。

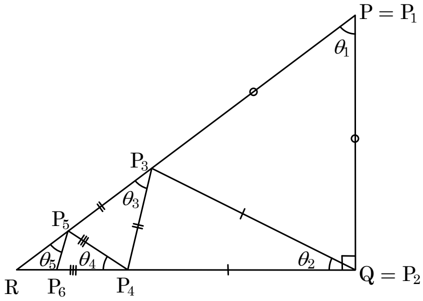
(1)　$f'(a)=0$，$f''(b)=0$ を満たす $a,\ b$ を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}e^{-x}=0$ であることは証明なしで用いてよい。

(2)　$k\geqq 0$ のとき $V(k)=\displaystyle\int_0^k xe^{-2x}dx$ を k を用いて表せ。

(3)　(1)で求めた $a,\ b$ に対して曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ



$\triangle \mathrm{PQR}$ において $\angle \mathrm{RPQ}=\theta$, $\angle \mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ とする。点 P_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次で定める。

$$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}\,,\ \ \mathrm{P}_2=\mathrm{Q}\,,\ \ \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}=\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$$

ただし，点 P_{n+2} は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}$ 上にあるものとする。実数 θ_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$\theta_n=\angle \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}$ $(0<\theta_n<\pi)$ で定める。

(1)　θ_2，θ_3 を θ を用いて表せ。

(2)　$\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は n によらない定数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n$ を求めよ。

6

解答解説のページへ

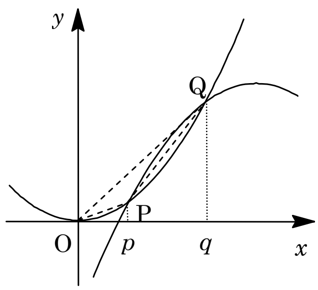
複素数平面上を動く点 z を考える。次の問いに答えよ。

(1) 等式 $|z-1|=|z+1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。

(2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。

(3) a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ



(1)　$C_1 : y = x^2$ ……①，$C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ ……②

を連立して，$x^2 = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ から，

$$2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0 \text{ ………③}$$

条件より，③は異なる正の解をもち，それを $x = p$，q とおくと，

$$D/4 = k^2 - 2(k^2 - 1) > 0 \text{ ………④}$$

$$p + q = k > 0 \text{ ……⑤},\quad pq = \frac{k^2 - 1}{2} > 0 \text{ ……⑥}$$

④より $k^2 - 2 < 0$ となり，$-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ ……④$'$，⑥より $k < -1$，$1 < k$ ……⑥$'$

したがって，④$'$⑤⑥$'$ から，$1 < k < \sqrt{2}$

(2)　$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと，△OPQ の重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ は，

$$x = \frac{1}{3}(p + q) \text{ ………⑦},\quad y = \frac{1}{3}(p^2 + q^2) = \frac{1}{3}\{(p + q)^2 - 2pq\} \text{ ………⑧}$$

⑤⑥を代入すると，$x = \dfrac{k}{3}$，$y = \dfrac{1}{3}\{k^2 - (k^2 - 1)\} = \dfrac{1}{3}$

よって，(1)から，G の軌跡は線分 $y = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ となる。

(3)　△OPQ の面積 S は，$S = \dfrac{1}{2}|pq^2 - p^2q| = \dfrac{1}{2}pq|q - p|$ となり，⑤⑥から，

$$S^2 = \frac{1}{4}p^2q^2(q - p)^2 = \frac{1}{4}(pq)^2\{(p + q)^2 - 4pq\}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(k^2 - 1)^2}{4}\{k^2 - 2(k^2 - 1)\} = -\frac{1}{16}(k^2 - 1)^2(k^2 - 2)$$

(4)　$t = k^2$ とおくと，(1)から $1 < t < 2$ となり，このとき $S^2 = f(t)$ とすると，

$$f(t) = -\frac{1}{16}(t - 1)^2(t - 2) = -\frac{1}{16}(t^3 - 4t^2 + 5t - 2)$$

$$f'(t) = -\frac{1}{16}(3t^2 - 8\mathrm{t} + 5)$$

$$= -\frac{1}{16}(3t - 5)(t - 1)$$

t	1	…	$\frac{5}{3}$	…	2
$f'(t)$	0	＋	0	－	
$f(t)$		↗		↘	

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$S^2 = f(t)$ は $t = \dfrac{5}{3}$ のとき最大値をとる。

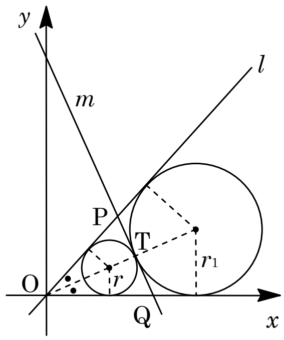
すなわち，△OPQ の面積 S は，$k = \sqrt{\dfrac{5}{3}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$ のとき最大となり，このとき(2)から $\mathrm{G}\left(\dfrac{\sqrt{15}}{9},\ \dfrac{1}{3}\right)$ である。

［解　説］

放物線を題材にした微分と最大・最小に関する典型題です。

2

問題のページへ



(1)　円 C_1，C_2 の半径を，それぞれ r_1，r_2 とする。

すると，$d_1 = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ から，

$$r_1 = d_1\sin\theta = 2\sin^2\theta\cos\theta$$

また，$r_2 = d_2\sin\theta$，$d_1 - d_2 = r_1 + r_2$ から，

$$2\sin\theta\cos\theta - d_2 = 2\sin^2\theta\cos\theta + d_2\sin\theta$$

$$(1+\sin\theta)d_2 = 2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)$$

よって，$d_2 = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ となり，

$$r_2 = \frac{2\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$$

(2)　円 C_1 と C_2 の接点を T とおくと，$\mathrm{OT}\perp\mathrm{PQ}$ から，

$$\mathrm{PQ} = 2\mathrm{OT}\tan\theta = 2(d_1 - r_1)\tan\theta = 2(2\sin\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta)\tan\theta$$

$$= 4\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)\tan\theta = 4\sin^2\theta(1-\sin\theta)$$

ここで，$t = \sin\theta$ とおくと，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ から $0 < t < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$\mathrm{PQ} = f(t)$ として，

$$f(t) = 4t^2(1-t) = 4t^2 - 4t^3$$

$$f'(t) = 8t - 12t^2 = 4t(2-3t)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり, PQ の最大値は $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 4\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{16}{27}$ である。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(3)　(2)から，$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ より $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ となり，このとき直線 m の傾きは,

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

また，$\mathrm{PQ} = \dfrac{16}{27}$ から $\mathrm{TQ} = \dfrac{8}{27}$ となり，$\mathrm{OQ} = \dfrac{\mathrm{TQ}}{\sin\theta} = \dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{4}{9}$ から点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{9},\ 0\right)$ である。すると，直線 m の方程式は,

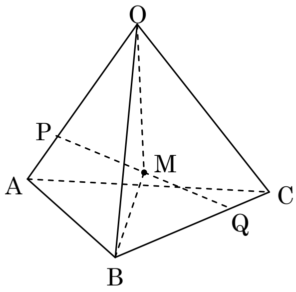
$$y = -\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x - \frac{4}{9}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{2}{9}\sqrt{5}$$

［解　説］

円と接線の関係をもとに, 微分を利用して最大・最小へと繋ぐ問題です。問題文に参考図が書かれているため, 解きやすくなっています。

3

問題のページへ



(1) $\mathrm{OP}:\mathrm{PA}=t:1-t$，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=t:1-t$，$\mathrm{PM}=\mathrm{QM}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{t}{2}\vec{a}+\frac{1-t}{2}\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{t}{2}\vec{a}-\frac{1+t}{2}\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}$

さて，AC の中点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1-t}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{BM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\frac{1+t}{2}\vec{b}$$

ここで，条件から$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|$なので，$\left|t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1-t}{2}\vec{b}\right|^2=\left|t\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\frac{1+t}{2}\vec{b}\right|^2$ となり，

$$t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{b}+\frac{(1-t)^2}{4}|\vec{b}|^2=-t(1+t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{b}+\frac{(1+t)^2}{4}|\vec{b}|^2$$

すると，$2t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{b}=t|\vec{b}|^2$ から，$|\vec{b}|^2=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{b}=(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}$

よって，条件 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ より，$|\vec{b}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

(3) (2)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{t}{2}\vec{a}+\frac{1-t}{2}\vec{b}+\frac{t-2}{2}\vec{c}$

さて，BA を $t:1-t$ に内分する点を E とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{t}{2}\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{CM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{t-2}{2}\vec{c}$$

ここで，条件から$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|$なので，$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{t}{2}\vec{c}\right|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{t-2}{2}\vec{c}\right|^2$ となり，

$$2t\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2=2(t-2)\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\vec{c}+(t-2)^2|\vec{c}|^2$$

すると，$|\vec{c}|^2=\frac{1}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\vec{c}=\frac{1}{1-t}\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\cdot\vec{c}=\frac{1}{1-t}$ となり，$|\vec{c}|=\sqrt{\frac{1}{1-t}}$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{t-2}{2}\vec{a}+\frac{1-t}{2}\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}$ となり，条件から$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|$

より，$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\frac{t}{2}\vec{a}\right|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\frac{t-2}{2}\vec{a}\right|^2$ なので，

$$|\vec{a}|^2=\frac{1}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{a}=\frac{1}{1-t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\vec{a}=\frac{1}{1-t},\ |\vec{a}|=\sqrt{\frac{1}{1-t}}$$

そこで，△OAB と△OCB において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\sqrt{\frac{1}{1-t}}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$ (共通)

さらに，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1$ から，$\sqrt{\frac{2}{1-t}}\cos\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{\frac{2}{1-t}}\cos\angle\mathrm{COB}$ から，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\cos\angle\mathrm{COB},\ \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{COB}$$

よって，△OAB と△OCB は合同である。

［解　説］

空間ベクトルの四面体への応用問題です。量的にやや多いので，(2)(3)で，ベクトルの置換えを行っています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}\ (x\geqq 0)$ に対して，$f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}-2\sqrt{x}e^{-x}=\dfrac{1-2x}{\sqrt{x}}e^{-x}$

$$f''(x)=\frac{-2\sqrt{x}-(1-2x)\cdot(2\sqrt{x})^{-1}}{x}e^{-x}-\frac{1-2x}{\sqrt{x}}e^{-x}=\frac{4x^2-4x-1}{2x\sqrt{x}}e^{-x}$$

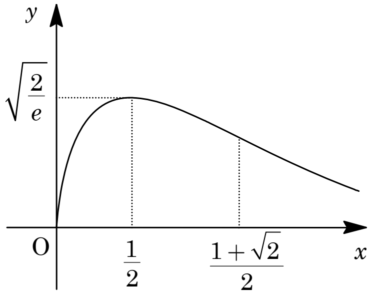
$f'(a)=0$，$f''(b)=0$ から，

$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

そして，$f(x)$ の増減，凹凸は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	↘		↘	0

また，$y=f(x)$ のグラフの概形は右下図の通りである。



(2)　$V(k)=\displaystyle\int_0^k xe^{-2x}dx$

$$=\Big[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big]_0^k+\frac{1}{2}\int_0^k e^{-2x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}ke^{-2k}-\frac{1}{4}\Big[e^{-2x}\Big]_0^k$$

$$=-\frac{1}{2}ke^{-2k}-\frac{1}{4}e^{-2k}+\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}(2k+1)e^{-2k}+\frac{1}{4}$$

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_a^b 4xe^{-2x}dx=4\pi\int_0^b xe^{-2x}dx-4\pi\int_0^a xe^{-2x}dx=4\pi\{V(b)-V(a)\}$$

ここで，(1)から，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ なので，

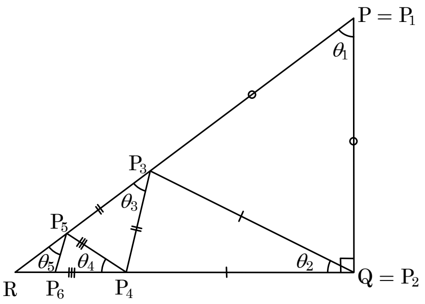
$$V=4\pi\Big\{-\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})e^{-(1+\sqrt{2})}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 2e^{-1}-\frac{1}{4}\Big\}=\Big(-\frac{2+\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}}+\frac{2}{e}\Big)\pi$$

［解　説］

微分法を利用してグラフの概形をかき，積分法を利用して回転体の体積を求めるという基本的な知識の確認問題です。

5

問題のページへ



(1)　右図より $\theta_1=\theta$ なので，$\theta_2=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi-\theta_1}{2}=\dfrac{\theta}{2}$

$$\theta_3=\pi-\frac{\pi-\theta_1}{2}-\frac{\pi-\theta_2}{2}=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$
$$=\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{4}=\frac{3}{4}\theta$$

(2)　$\dfrac{\pi-\theta_n}{2}+\dfrac{\pi-\theta_{n+1}}{2}+\theta_{n+2}=\pi$ より，

$$\theta_{n+2}=\frac{\theta_{n+1}}{2}+\frac{\theta_n}{2}$$

すると，$\theta_{n+2}+\dfrac{\theta_{n+1}}{2}=\dfrac{\theta_{n+1}}{2}+\dfrac{\theta_n}{2}+\dfrac{\theta_{n+1}}{2}=\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}$ となるので，

$$\theta_{n+1}+\frac{\theta_n}{2}=\theta_2+\frac{\theta_1}{2}=\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}=\theta\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　$(*)$より，$\theta_{n+1}=-\dfrac{\theta_n}{2}+\theta$ となり，$\theta_{n+1}-\dfrac{2}{3}\theta=-\dfrac{1}{2}\Big(\theta_n-\dfrac{2}{3}\theta\Big)$ と変形すると，

$$\theta_n-\frac{2}{3}\theta=\Big(\theta_1-\frac{2}{3}\theta\Big)\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\frac{\theta}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1},\ \ \theta_n=\frac{\theta}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}+\frac{2}{3}\theta$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=\lim_{n\to\infty}\Big\{\frac{\theta}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}+\frac{2}{3}\theta\Big\}=\frac{2}{3}\theta$

［解　説］

図形がらみの数列の問題では，問題文に参考図が書いてあるかどうかで，難易がかなり違ってきます。本問でも，図を書くところから始めると，かなり時間を費やすのではないかと思えます。また，隣接 3 項間型の漸化式の変形についても，誘導を(2)の設問にするほど丁寧です。

6

問題のページへ

(1)　$|z-1|=|z+1|$……①に対して，左辺は点 z と点 1 との距離，右辺は点 z と点 -1 との距離を表す。

これより，①を満たす点 z の全体は，点 1 と点 -1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸となる。

(2)　$w=\dfrac{z+1}{z}$ $(z\neq 0)$ より，$wz=z+1$ となり，$(w-1)z=1$ ………②

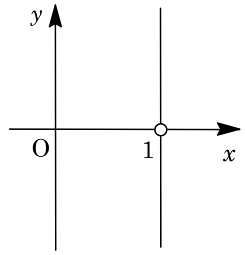
ここで，$w=1$ とすると②は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{1}{w-1}$ ………③

③を①に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{1}{w-1}+1\right|$ となり，$\left|\dfrac{2-w}{w-1}\right|=\left|\dfrac{w}{w-1}\right|$ から，

$$\frac{|2-w|}{|w-1|}=\frac{|w|}{|w-1|},\ |2-w|=|w|$$

すると，点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，点 w は点 2 と点 0 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち点 1 を通り実軸に垂直な直線上を動く。ただし $w\neq 1$ から点 1 は除く。

図示すると，右図のようになる。



(3)　$a>0$ で $w=\dfrac{z+1}{z-a}$ より，$w(z-a)=z+1$ となり，$(w-1)z=aw+1$ ………④

ここで，$w=1$ とすると④は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{aw+1}{w-1}$ ………⑤

⑤を①に代入すると，$\left|\dfrac{aw+1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{aw+1}{w-1}+1\right|$ となり，

$$\left|\frac{(a-1)w+2}{w-1}\right|=\left|\frac{(a+1)w}{w-1}\right|,\ |(a-1)w+2|=|(a+1)w|$$

両辺を 2 乗して，$|(a-1)w+2|^2=(a+1)^2|w|^2$ より，

$$\{(a-1)w+2\}\{(a-1)\overline{w}+2\}=(a+1)^2w\overline{w}$$

$$4aw\overline{w}-2(a-1)w-2(a-1)\overline{w}=4,\ w\overline{w}-\frac{a-1}{2a}w-\frac{a-1}{2a}\overline{w}=\frac{1}{a}\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑥より，$\left(w-\dfrac{a-1}{2a}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{a-1}{2a}\right)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{(a-1)^2}{4a^2}$ となり，

$$\left|w-\frac{a-1}{2a}\right|^2=\frac{(a+1)^2}{4a^2},\ \left|w-\frac{a-1}{2a}\right|=\frac{a+1}{2a}$$

よって，点 z が虚軸上を動くとき，点 w は中心 $\dfrac{a-1}{2a}$ で半径 $\dfrac{a+1}{2a}$ の円を描く。ただし，$w\neq 1$ から点 1 は除く。

［解　説］

複素数平面上の変換を問う問題です。(1)において，まず①を変形して，$z+\overline{z}=0$ という関係を導き，この式をもとに(2), (3)を解くという方法もあります。