1　　解答解説のページへ

a を正の実数とする。2 つの関数

$$y=\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3,\quad y=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

のグラフは，2 点 A, B で交わる。ただし, A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。また，2 点 A, B を結ぶ線分の垂直二等分線を l とする。

(1)　2 点 A, B の座標を a を用いて表せ。

(2)　直線 l の方程式を a を用いて表せ。

(3)　原点と直線 l の距離 d を a を用いて表せ。また，$a>0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$\beta,\ m$ をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1) $a,\ b,\ c$ および $\beta,\ m$ の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$が，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を満たすとする。また，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$b_n \geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を示せ。

(2)　b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　a_{2017}の一の位の数を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)=2x^2-9x+14-\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{x^2}\ (x>0)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ のすべての極値を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を $[\,a\,]$ で表す。記号$[\quad]$をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

(1) n を $0 \leqq n \leqq N$ を満たす整数とする。点 $(n,\ 0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

(2) 直線 $y = x$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$ $(0 \leqq x \leqq N)$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2)の $A(N)$ に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。

6

解答解説のページへ

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。複素数平面上において，原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点 $P_1(w_1)$，$P_2(w_2)$，$P_3(w_3)$，$P_4(w_4)$，$P_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり，次の 2 つの条件(Ⅰ), (Ⅱ)を満たすとする。

(Ⅰ)　$(\cos^2\alpha)(w_2-w_1)^2+(\sin^2\alpha)(w_5-w_1)^2=0$ が成り立つ。

(Ⅱ)　$\dfrac{w_3}{w_2}$ と $-\dfrac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ の解である。

また，五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1)　五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の頂点 P_1 における内角 $\angle P_5P_1P_2$ を求めよ。

(2)　S を α を用いて表せ。

(3)　$R=\left|w_1+w_2+w_3+w_4+w_5\right|$ とする。このとき，R^2+2S は α の値によらないことを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$a>0$ のとき，$y=\dfrac{1}{3}ax^2-2a^2x+\dfrac{7}{3}a^3$，$y=-\dfrac{2}{3}ax^2+2a^2x-\dfrac{2}{3}a^3$ を連立すると，

$$\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

$$ax^2-4a^2x+3a^3=0,\ a(x-a)(x-3a)=0$$

よって，$x=a$，$3a$ より，$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{2}{3}a^3\right)$，$\mathrm{B}\left(3a,\ -\dfrac{2}{3}a^3\right)$ である。

(2)　線分 AB の垂直二等分線 l 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ から，

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{2}{3}a^3\right)^2=(x-3a)^2+\left(y+\frac{2}{3}a^3\right)^2$$

$$-2ax+a^2-\frac{4}{3}a^3y=-6ax+9a^2+\frac{4}{3}a^3y$$

よって，$4ax-\dfrac{8}{3}a^3y-8a^2=0$ より，$l: 3x-2a^2y-6a=0$ となる。

(3)　原点と直線 l の距離 d は，$d=\dfrac{|-6a|}{\sqrt{9+4a^4}}=\dfrac{6a}{\sqrt{9+4a^4}}$

ここで，d を最大とする $a>0$ を求めるために，$d=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{a^2}+4a^2}}$ と変形すると，

$$\frac{9}{a^2}+4a^2\geqq 2\sqrt{\frac{9}{a^2}\cdot 4a^2}=12$$

等号は $\dfrac{9}{a^2}=4a^2\left(a=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ のときに成立する。

よって，d を最大にする a の値は，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

［解　説］

放物線と直線に関する基本的な問題です。

2

問題のページへ

(1) 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta\ (0<\beta<1)$ で極値をとるので，$f'(\beta)=f'(-\beta)=0$ となり，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ から，

$$f'(x)=3(x+\beta)(x-\beta)=3x^2-3\beta^2$$

すると，k を定数として，$f(x)=x^3-3\beta^2x+k$ である。

さて，条件より，$m>0$ で，$f(-1)=f(\beta)=-m$ より，

$$-1+3\beta^2+k=-m\cdots\cdots\text{①},\ -2\beta^3+k=-m\cdots\cdots\text{②}$$

また，$f(1)=f(-\beta)=m$ より，

$$1-3\beta^2+k=m\cdots\cdots\text{③},\ 2\beta^3+k=m\cdots\cdots\text{④}$$

②④より，$k=0$，$m=2\beta^3$ となり，①③に代入すると①と③は一致し，

$$2\beta^3+3\beta^2-1=0,\ (2\beta-1)(\beta+1)^2=0$$

すると，$0<\beta<1$ から $\beta=\dfrac{1}{2}$ となり，$m=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

そして，$f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x$ から，$a=0$，$b=-\dfrac{3}{4}$，$c=0$

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき $-m\leqq g(x)\leqq m$ を満たし，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，

$$h(-1)=f(-1)-g(-1)=-m-g(-1)\leqq 0\cdots\cdots\text{⑤}$$

$$h(-\beta)=f(-\beta)-g(-\beta)=m-g(-\beta)\geqq 0\cdots\cdots\text{⑥}$$

$$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=-m-g(\beta)\leqq 0\cdots\cdots\text{⑦}$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=m-g(1)\geqq 0\cdots\cdots\text{⑧}$$

ここで，$h(x)$ は 2 次以下の関数となり，$h(x)=sx^2+tx+u$ とおくと，⑤⑧より，

$$s-t+u\leqq 0\cdots\cdots\text{⑨},\ s+t+u\geqq 0\cdots\cdots\text{⑩}$$

そして，$\beta=\dfrac{1}{2}$ から，⑥⑦より，

$$\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}t+u\geqq 0\cdots\cdots\text{⑪},\ \frac{1}{4}s+\frac{1}{2}t+u\leqq 0\cdots\cdots\text{⑫}$$

すると，⑩－⑨から $t\geqq 0$，⑫－⑪から $t\leqq 0$ となるので，$t=0$ である。

これより，⑨から $s+u\leqq 0$，⑩から $s+u\geqq 0$ となるので，$s+u=0\cdots\cdots$⑬

さらに，⑪から $\dfrac{1}{4}s+u\geqq 0$，⑫から $\dfrac{1}{4}s+u\leqq 0$ となるので，$\dfrac{1}{4}s+u=0\cdots\cdots$⑭

⑬⑭より，$s=u=0$ となり，以上より $h(x)=0$ である。

［解 説］

微分の応用問題です。なお，(2)は図を書くと結論は明らかなのですが，それを示すのは……。ということで，数式を用いて処理をしました。

3

問題のページへ

(1)　$a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_{n+2} = 3{a_{n+1}}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3{a_n}^2 + a_{n+1}$ に対して，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)^2$$

ここで，$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと，$b_1 = 2 \geqq 0$，$b_{n+1} = 3{b_n}^2$ ………①

よって，帰納的に，$b_n \geqq 0$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ である。

(2)　以下，b_n の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n = 1$ のとき　$b_1 = 2$ より成立している。

(ii)　$n = k$ のとき　b_k の一の位の数が 2 であると仮定する。

これより，l_k を 0 以上の整数として，$b_k = 10l_k + 2$ とおくと，①から，

$$b_{k+1} = 3{b_k}^2 = 3(10l_k + 2)^2 = 300{l_k}^2 + 120l_k + 12 = 10(30{l_k}^2 + 12l_k + 1) + 2$$

よって，b_{k+1} の一の位の数は 2 である。

(i)(ii)より，b_n の一の位の数は 2 である。

(3)　(2)より，l_n を 0 以上の整数として，$b_n = 10l_n + 2$ とおくことができ，

$$a_{n+1} - a_n = 10l_n + 2 \text{ ………②}$$

すると，$n \geqq 2$ において，②から，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(10l_k + 2)$ となり，

$$a_{2017} = 1 + 10\sum_{k=1}^{2016} l_k + 2\cdot 2016 = 10\sum_{k=1}^{2016} l_k + 4033 = 10\Big(\sum_{k=1}^{2016} l_k + 403\Big) + 3$$

したがって，a_{2017} の一の位の数は 3 である。

［解　説］

整数と漸化式の融合問題です。(1)は簡単に記しましたが，丁寧に書くなら数学的帰納法です。また，(2)(3)は合同式を用いると，少し簡略になります。

4　　問題のページへ

(1)　$x>0$ のとき，$f(x)=2x^2-9x+14-\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ に対して，$f(x)=0$ とすると，

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0,\ 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと，$t\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ となり，(*)から，

$$2t^2-9t+10=0,\ (2t-5)(t-2)=0,\ t=\frac{5}{2},\ 2$$

$t=\dfrac{5}{2}$ のとき，$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ となり，$2x^2-5x+2=0$ から，$x=\dfrac{1}{2}$，2 となる。

$t=2$ のとき，$x+\dfrac{1}{x}=2$ となり，$x^2-2x+1=0$ から，$x=1$ となる。

以上より，$f(x)=0$ の解は，$x=\dfrac{1}{2}$，2，1 である。

(2)　$x>0$ のとき，$f'(x)=4x-9+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}=\dfrac{1}{x^3}(4x^4-9x^3+9x-4)$ となり，

$$f'(x)=\frac{1}{x^3}(x-1)(x+1)(4x^2-9x+4)$$

ここで，$f'(x)=0$ とすると，$x>0$ では $x=1$，$\dfrac{9\pm\sqrt{17}}{8}$ から，$\alpha=\dfrac{9-\sqrt{17}}{8}$，$\beta=\dfrac{9+\sqrt{17}}{8}$ とおき，$f(x)$ の増減を調べると，右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	×	↘		↗	0	↘		↗

さて，α の条件は，$4\alpha^2-9\alpha+4=0$ から $4\alpha-9+\dfrac{4}{\alpha}=0$ となり，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{9}{4}$

同様に，$\beta+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{9}{4}$ となるので，(*)から，

$$f(\alpha)=f(\beta)=2\left(\frac{9}{4}\right)^2-9\cdot\frac{9}{4}+10=-\frac{1}{8}$$

したがって，$f(x)$ の極大値は $0\ (x=1)$，極小値は $-\dfrac{1}{8}\ \left(x=\dfrac{9\pm\sqrt{17}}{8}\right)$ である。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2$ で $f(x)\leqq 0$ より，

$$S=-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2x^2-9x+14-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2-14x+9\log|x|+\frac{2}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=-\frac{21}{4}+\frac{135}{8}-21+9\log 4-3=-\frac{99}{8}+18\log 2$$

［解 説］

微積分の総合問題です。ポイントは(2)の極小値を求める計算です。

5

問題のページへ

(1)　点$(n,\ 0)$と点$\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$を結ぶ線分上の格子点の座標を$(n,\ l)$とおくと，

$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]$より，その個数は$\left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]+1$である。

(2)　直線$y=x$, x軸，$x=N$で囲まれた領域(境界含む)にある格子点の個数$A(N)$は，

$$A(N)=1+\sum_{k=1}^{N}(k+1)=\sum_{k=1}^{N+1}k=\frac{1}{2}(N+1)(N+2)\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　曲線$y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$$(0\leqq x\leqq N)$，$x$ 軸，直線$x=N$で囲まれた領域(境界含む)

にある格子点の個数$B(N)$は，

$$B(N)=1+\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]+1\right\}=N+1+\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\cdots\cdots\cdots②$$

さて，一般的に，$[a]\leqq a<[a]+1$から，$a-1<[a]\leqq a$となり，

$$N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-1<\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-N<\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

②より，$1+N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)<B(N)\leqq N+1+N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$となり，①から，

$$\frac{2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}<\frac{B(N)}{A(N)}\leqq\frac{2N+2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$$

さて，$I(N)=\dfrac{2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$，$J(N)=\dfrac{2N+2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$とおくと，

$$I(N)=\frac{2}{(N+1)(N+2)}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$J(N)=\frac{2}{N+2}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

すると，$N\to\infty$のとき，$\dfrac{\pi}{2N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\to\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$より，

$$I(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi},\quad J(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi}$$

したがって，$I(N)<\dfrac{B(N)}{A(N)}\leqq J(N)$から，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}=\frac{4}{\pi}$となる。

［解 説］

格子点の個数を題材にした数列の極限の問題ですが，それに区分求積が絡むという味付けが施されています。

$\boxed{6}$ 問題のページへ

(1) 原点を中心とする半径 1 の円上に反時計まわりに並んだ 5 点 $P_1(w_1)$，$P_2(w_2)$，$P_3(w_3)$，$P_4(w_4)$，$P_5(w_5)$ に対して，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，条件(I)より，

$$(\cos^2 a)(w_2-w_1)^2+(\sin^2 a)(w_5-w_1)^2=0$$

すると，$(w_2-w_1)^2=-(\tan^2 a)(w_5-w_1)^2$ から，$\left(\dfrac{w_2-w_1}{w_5-w_1}\right)^2=-(\tan^2 a)$ となり，

$$\frac{w_2-w_1}{w_5-w_1}=\pm(\tan a)i\cdots\cdots\cdots①$$

よって，$\arg\left(\dfrac{w_2-w_1}{w_5-w_1}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$ から，$\angle P_5P_1P_2=\left|\pm\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}$

(2) ①より，$\left|\dfrac{w_2-w_1}{w_5-w_1}\right|=\tan a$ となり，$|w_2-w_1|=(\tan a)|w_5-w_1|$

すると，直角三角形 $P_5P_1P_2$ は，直角をはさむ辺の長さに，$P_1P_2=(\tan a)P_1P_5$ という関係があるので，これから $\angle P_2P_5P_1=a$ となり，

$$\angle P_2OP_1=2\angle P_2P_5P_1=2a$$

また，条件(Ⅱ)より，$\dfrac{w_3}{w_2}$ と $-\dfrac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ の解 $z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$ より，

(i) $\dfrac{w_3}{w_2}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，$-\dfrac{w_4}{w_2}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ のとき

$$w_3=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)w_2,\quad w_4=\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)w_2$$

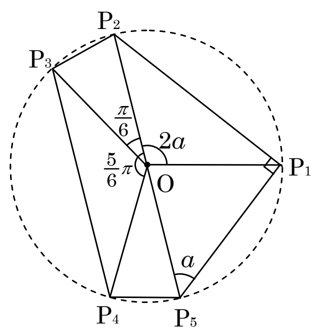
(ii) $\dfrac{w_3}{w_2}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$，$-\dfrac{w_4}{w_2}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ のとき

$$w_3=\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)w_2,\quad w_4=\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)w_2$$

これは，P_2，P_3，P_4 が，円上を反時計まわりに並んでいることに反する。

(i)(ii)より，P_3 は P_2 を $\dfrac{\pi}{6}$，P_4 は P_2 を $\dfrac{5}{6}\pi$ だけ原点のまわりに回転させた点である。

以上より，五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ は右図のようになり，



$$\triangle P_1OP_2=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin 2a=\frac{1}{2}\sin 2a$$

$$\triangle P_5OP_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin(\pi-2a)=\frac{1}{2}\sin 2a$$

$$\triangle P_2OP_3=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$$

$$\triangle P_3OP_4=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle P_4OP_5=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\left(\pi-\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{4}$$

よって，五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sin 2a+\frac{1}{2}\sin 2a+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=\sin 2a+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(3)　$R=\left|w_1+w_2+w_3+w_4+w_5\right|$ に対し，$w_1=1$ としても一般性を失うことなく，

$$w_2=\cos 2a+i\sin 2a\ ,\ \ w_5=-\cos 2a-i\sin 2a$$

$$w_3=\cos\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2a+\frac{\pi}{6}\right),\ \ w_4=\cos\left(2a+\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(2a+\frac{5}{6}\pi\right)$$

ここで，$t=w_1+w_2+w_3+w_4+w_5$ とおくと，

$$t=1+\cos\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2a+\frac{5}{6}\pi\right)+i\left\{\sin\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2a+\frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$

$$=1+2\cos\left(2a+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{3}+2i\sin\left(2a+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{3}=1-\sin 2a+i\cos 2a$$

これより，$R^2=\left|t\right|^2=(1-\sin 2a)^2+(\cos 2a)^2=2-2\sin 2a$ となり，

$$R^2+2S=2-2\sin 2a+2\sin 2a+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=3+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，R^2+2S は a の値によらない。

［解　説］

複素数平面上の図形の関する問題です。与えられた 2 つの条件を，絶対値や偏角を計算して，図形的な言葉に翻訳することがポイントです。