1

解答解説のページへ

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(\tan\theta,\ \tan^2\theta)$, $\mathrm{B}(-\tan\theta,\ \tan^2\theta)$ をとる。三角形 OAB の内心の y 座標を p とし，外心の y 座標を q とする。また，正の実数 a に対して，直線 $y=a$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。

(1) p, q を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2) $\dfrac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos\theta$ の値をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

放物線$C: y=x^2+ax+b$が 2 直線$l_1: y=px\ (p>0)$，$l_2: y=qx\ (q<0)$と接している。また，Cとl_1，l_2で囲まれた図形の面積をSとする。

(1) a, bをp, qを用いてそれぞれ表せ。

(2) Sをp, qを用いて表せ。

(3) l_1，l_2が直交するようにp, qが動くとき，Sの最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

正三角形 OAB に対し，直線 OA 上の点P_1，P_2，P_3，…および直線 OB 上の点Q_1，Q_2，Q_3，…を，次の(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)を満たすようにとる。

(Ⅰ)　$\mathrm{P}_1=\mathrm{A}$ である。

(Ⅱ)　線分$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$，…はすべて直線 OA に垂直である。

(Ⅲ)　線分$\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{Q}_3\mathrm{P}_4$，…はすべて直線 OB に垂直である。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とおく。点 O を基準とする位置ベクトルが，整数 k, l によって$k\vec{a}+l\vec{b}$と表される点全体の集合を S とする。n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\vec{a}+y\vec{b}$で定まる点 R が線分$\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$上にあるとき，$x$ を y を用いて表せ。

　また，線分$\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$上にある S の点の個数を求めよ。

(3)　三角形$\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$の周または内部にある S の点の個数を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

2 つの曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sin x}\ (0 < x < \pi)$，$C_2 : y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x)\ (0 < x < \pi)$ について以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標を求めよ。

(2)　曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V が π^2 であることを示せ。

5

解答解説のページへ

$f(x)=\int_0^x \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ とし，$c \geqq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1=c$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1) $f(\pi)$ を求めよ。また，$x \geqq \pi$ のとき，$0 < f'(x) \leqq \frac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_n \geqq \pi$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi| \leqq \frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ が成り立つことを示せ。また，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

複素数αに対して，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(α)，B(α^2)を考える。次の条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)をすべて満たす複素数α全体の集合をSとする。

(Ⅰ)　αは実数でも純虚数でもない。

(Ⅱ)　$|\alpha|>1$である。

(Ⅲ)　三角形 OAB は直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　αがSに属するとき，$\angle \mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$であることを示せ。

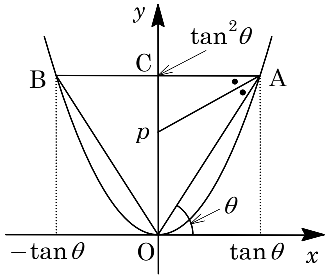
(2)　集合Sを複素数平面上に図示せよ。

(3)　x, y を$\alpha^2=x+yi$を満たす実数とする。αが S を動くとき，xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求め，図示せよ。

1

問題のページへ

(1) まず，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(\tan\theta,\ \tan^2\theta)$，$\mathrm{B}(-\tan\theta,\ \tan^2\theta)$ に対し，線分 AB と y 軸との交点を C とおく。



さて，二等辺三角形 OAB の内心は，y 軸と∠OAB の二等分線の交点であり，その y 座標を p とする。

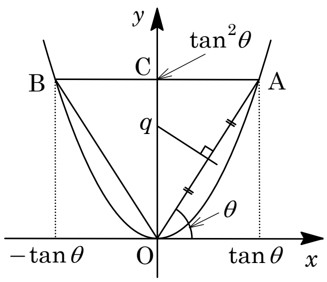
ここで，直線 OA の傾きは $\tan\theta$ なので, OA と x 軸の正の向きとのなす角は θ である。これより，$\angle\mathrm{OAB}=\theta$ となるので,

$$p=\mathrm{OC}-\mathrm{AC}\tan\frac{\theta}{2}=\tan^2\theta-\tan\theta\tan\frac{\theta}{2}=\tan\theta\Bigl(\tan\theta-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\Bigr)$$

$$=\tan\theta\Bigl(\tan\theta-\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}\Bigr)=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Bigl(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\Bigr)$$

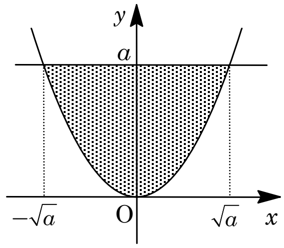
$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\cos^2\theta}$$

また，二等辺三角形 OAB の外心は，y 軸と線分 OA の垂直二等分線の交点であり，その y 座標を q とすると，$\mathrm{OA}=\sqrt{\tan^2\theta+\tan^4\theta}=\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}=\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}$ で，$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ から,



$$q=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\frac{1}{\cos\angle\mathrm{AOC}}=\frac{\tan\theta}{2\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{2\cos^2\theta}$$

(2) まず，直線 $y=a\ (a>0)$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，y 軸に関する対称性から,



$$S(a)=2\Bigl\{a\sqrt{a}-\int_0^{\sqrt{a}}x^2dx\Bigr\}=2a\sqrt{a}-\frac{2}{3}a\sqrt{a}$$

$$=\frac{4}{3}a\sqrt{a}=\frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

(1)より，$S(p)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{\cos^3\theta}$，$S(q)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}\cos^3\theta}$ となり,

$$\frac{S(p)}{S(q)}=2\sqrt{2}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}=\{2(1-\cos\theta)\}^{\frac{3}{2}}$$

条件から，$\{2(1-\cos\theta)\}^{\frac{3}{2}}=k$　(k は自然数)と表せ,

$$8(1-\cos\theta)^3=k^2\ \cdots\cdots(*)$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\cos\theta<1$ となり，$0<8(1-\cos\theta)^3<8$ なので，$(*)$を満たす k は，$k=1,\ 2$ である。

(i)　$k=1$ のとき　$8(1-\cos\theta)^3=1$ より $1-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となり，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$k=2$ のとき　$8(1-\cos\theta)^3=4$ より $1-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ となり，$\cos\theta=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

［解　説］

(1)はいろいろな方法が考えられ，解答例では図形的に処理しましたが，それ以外に角の二等分線や辺の垂直二等分線の方程式を立てて計算しても構いません。

2

問題のページへ

(1) 放物線$C: y=x^2+ax+b$ ……①と直線$y=cx$ (cは定数)……②を連立して,

$$x^2+ax+b=cx\,,\ x^2+(a-c)x+b=0\ \cdots\cdots\text{③}$$

①②が接するとき, $D=(a-c)^2-4b=0$から,

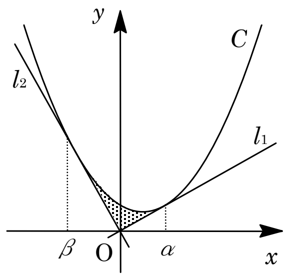
$$c^2-2ac+a^2-4b=0\ \cdots\cdots\text{④}$$

ここで, 条件より C は$l_1: y=px$ ($p>0$), $l_2: y=qx$ ($q<0$)と接しており, これは, ④の解が$c=p$, qであることを意味するので,

$$p+q=2a\,,\ pq=a^2-4b$$

すなわち, $a=\frac{1}{2}(p+q)$, $b=\frac{1}{4}(a^2-pq)=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}(p+q)^2-pq\right\}=\frac{1}{16}(p-q)^2$

(2) C とl_1, l_2の接点の x 座標を, それぞれα, βとおくと, ③の重解が$x=-\frac{a-c}{2}=\frac{1}{2}(c-a)$となることより,



$$\alpha=\frac{1}{2}(p-a)=\frac{1}{4}(p-q)$$

$$\beta=\frac{1}{2}(q-a)=\frac{1}{4}(-p+q)$$

すると, Cとl_1, l_2で囲まれた図形の面積Sは,

$$S=\int_\beta^0(x^2+ax+b-qx)dx+\int_0^\alpha(x^2+ax+b-px)dx$$

$$=\int_\beta^0(x-\beta)^2dx+\int_0^\alpha(x-\alpha)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-\beta)^3\Big]_\beta^0+\frac{1}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_0^\alpha$$

$$=\frac{1}{3}(-\beta)^3-\frac{1}{3}(-\alpha)^3=\frac{1}{3}(\alpha^3-\beta^3)=\frac{1}{3\cdot64}\{(p-q)^3-(-p+q)^3\}$$

$$=\frac{1}{3\cdot32}(p-q)^3=\frac{1}{96}(p-q)^3$$

(3) l_1, l_2が直交するとき, $pq=-1$より$q=-\frac{1}{p}$となり, $S=\frac{1}{96}\left(p+\frac{1}{p}\right)^3$

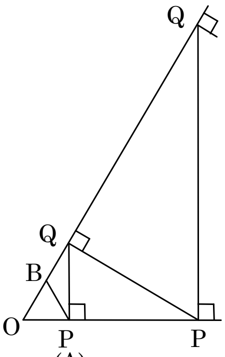
ここで, 相加平均と相乗平均の関係より, $p+\frac{1}{p}\geqq2$ (等号は$p=1$のとき)となるので, Sの最小値は, $\frac{1}{96}\cdot2^3=\frac{1}{12}$である。

［解　説］

放物線と 2 接線に囲まれた図形の面積の最小値という超頻出問題です。

3

問題のページへ



(A)

(1)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=L$ とおくと，$\mathrm{OP_1}=L$，$\mathrm{OQ_1}=\mathrm{OP_1}\tan\dfrac{\pi}{3}=2L$

$$\mathrm{OP_2}=\mathrm{OQ_1}\tan\frac{\pi}{3}=4L,\ \mathrm{OQ_2}=\mathrm{OP_2}\tan\frac{\pi}{3}=8L,\ \cdots$$

同様に考えると，$\mathrm{OP}_n=4^{n-1}L$，$\mathrm{OQ}_n=2\cdot4^{n-1}L$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=4^{n-1}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}=2\cdot4^{n-1}\vec{b}$ である。

(2)　点 R が線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上にあるとき，$0\leqq t\leqq1$ として，(1)の結果を代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$$
$$=4^n(1-t)\vec{a}+2\cdot4^{n-1}t\vec{b}\cdots\cdots\cdots①$$

また，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\vec{a}+y\vec{b}\cdots\cdots\cdots②$

①②から，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立なので，$x=4^n(1-t)$，$y=2\cdot4^{n-1}t$ となり，

$$x=4^n-4^n\cdot\frac{y}{2\cdot4^{n-1}}=4^n-2y\cdots\cdots\cdots③$$

また，③から y が整数のとき x も整数となるので，③を満たす整数の組$(x,\ y)$の個数，すなわち S の点の個数は，$0\leqq y\leqq2\cdot4^{n-1}$ から $2\cdot4^{n-1}+1$ である。

(3)　点 R が$\triangle\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$の周または内部にあるとき，$r\geqq0$，$s\geqq0$，$r+s\leqq1$ として，

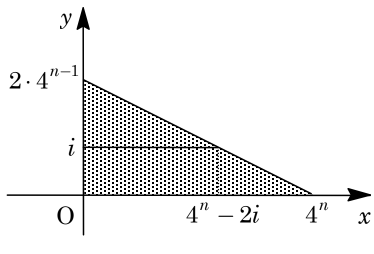
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}=4^nr\vec{a}+2\cdot4^{n-1}s\vec{b}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とすると，(2)と同様に，

$$x=4^nr\cdots\cdots\cdots④,\ \ y=2\cdot4^{n-1}s\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$r=\dfrac{x}{4^n}$，$s=\dfrac{y}{2\cdot4^{n-1}}$ となるので，$r\geqq0$，$s\geqq0$ より，

$$x\geqq0\cdots\cdots\cdots⑥,\ \ y\geqq0\cdots\cdots\cdots⑦$$



さらに，$r+s\leqq1$ より $\dfrac{x}{4^n}+\dfrac{y}{2\cdot4^{n-1}}\leqq1$ となり，

$$x+2y\leqq4^n\cdots\cdots\cdots⑧$$

したがって，⑥⑦⑧を満たす整数の組$(x,\ y)$の個数，すなわち S の点の個数を N とすると，

$$N=\sum_{i=0}^{2\cdot4^{n-1}}(4^n-2i+1)=(4^n+1)(2\cdot4^{n-1}+1)-2\cdot\frac{1}{2}(2\cdot4^{n-1})(2\cdot4^{n-1}+1)$$
$$=(4^n+1-2\cdot4^{n-1})(2\cdot4^{n-1}+1)=(2\cdot4^{n-1}+1)^2$$

［解　説］

ベクトルの絡んだ数列の応用問題です。ただ，メインではない(1)は，やや雑な記述になっています。

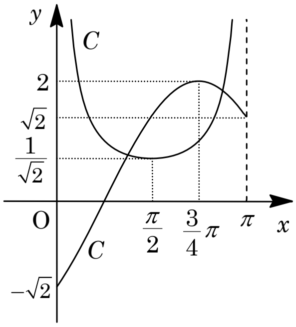
$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$0<x<\pi$ において，$C_1: y=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin x}$ ………①

$C_2: y=\sqrt{2}(\sin x-\cos x)$ ………②

②より，$C_2: y=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ となり，C_1，C_2 の概形は右図のようになる。



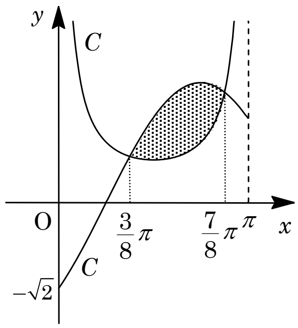
さて，①②を連立すると，$\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin x}=\sqrt{2}(\sin x-\cos x)$

$2\sin^2 x-2\sin x\cos x=1$，$(1-\cos 2x)-\sin 2x=1$

$\sin 2x+\cos 2x=0$，$\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

すると，$\dfrac{\pi}{4}<2x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ から $2x+\dfrac{\pi}{4}=\pi,\ 2\pi$ となり，C_1 と C_2 の共有点の x 座標は $x=\dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi$ となる。

(2)　C_1 と C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V は，右図より，



$$V=\pi\int_{\frac{3}{8}\pi}^{\frac{7}{8}\pi}2(\sin x-\cos x)^2dx-\pi\int_{\frac{3}{8}\pi}^{\frac{7}{8}\pi}\frac{1}{2\sin^2 x}dx$$

$V_1=\displaystyle\int_{\frac{3}{8}\pi}^{\frac{7}{8}\pi}(\sin x-\cos x)^2dx$，$V_2=\displaystyle\int_{\frac{3}{8}\pi}^{\frac{7}{8}\pi}\frac{1}{\sin^2 x}dx$ とおくと，$V=2\pi V_1-\dfrac{1}{2}\pi V_2$ となり，

$$V_1=\int_{\frac{3}{8}\pi}^{\frac{7}{8}\pi}(1-\sin 2x)dx=\left[x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{3}{8}\pi}^{\frac{7}{8}\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V_2=\left[-\frac{1}{\tan x}\right]_{\frac{3}{8}\pi}^{\frac{7}{8}\pi}=-\frac{1}{\tan\frac{7}{8}\pi}+\frac{1}{\tan\frac{3}{8}\pi}=-\frac{\cos\frac{7}{8}\pi}{\sin\frac{7}{8}\pi}+\frac{\cos\frac{3}{8}\pi}{\sin\frac{3}{8}\pi}$$

$$=\frac{-\cos\frac{7}{8}\pi\sin\frac{3}{8}\pi+\sin\frac{7}{8}\pi\cos\frac{3}{8}\pi}{\sin\frac{7}{8}\pi\sin\frac{3}{8}\pi}=\frac{2\sin\left(\frac{7}{8}\pi-\frac{3}{8}\pi\right)}{\cos\left(\frac{7}{8}\pi-\frac{3}{8}\pi\right)-\cos\left(\frac{7}{8}\pi+\frac{3}{8}\pi\right)}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$$

よって，$V=2\pi\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\pi\cdot 2\sqrt{2}=\pi^2$ となる。

［解　説］

回転体の体積を求める問題ですが，その計算はやや面倒です。

5

問題のページへ

(1) $f(x)=\int_0^x \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ に対して，$f(\pi)=\int_0^\pi \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ となる。

$t=\pi\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dt=\frac{\pi}{\cos^2\theta}d\theta=\pi(1+\tan^2\theta)d\theta$ より，

$$f(\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\pi}{\pi^2(\tan^2\theta+1)}\cdot\pi(1+\tan^2\theta)d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$$

また，$f'(x)=\frac{4\pi}{x^2+\pi^2}$ となり，$x\geqq\pi$ のとき $x^2+\pi^2\geqq 2\pi^2$ から，

$$0<\frac{1}{x^2+\pi^2}\leqq\frac{1}{2\pi^2},\ \ 0<f'(x)\leqq\frac{1}{2\pi^2}\cdot 4\pi=\frac{2}{\pi}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=c\geqq\pi$，$a_{n+1}=f(a_n)$ を満たすとき，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq\pi$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ のとき　$a_1=c\geqq\pi$ より成立。

(ii) $n=k$ のとき　$a_k\geqq\pi$ と仮定する。

このとき，(1)より $\pi=f(\pi)$ で，しかも $f'(x)>0$ から $f(x)$ は単調増加するので，

$$a_{k+1}-\pi=f(a_k)-f(\pi)\geqq 0$$

よって，$a_{k+1}\geqq\pi$ となり，$n=k+1$ のときも成立。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq\pi$ が成り立つ。

(3) まず，$a_n=\pi$ のときは $a_{n+1}=f(\pi)=\pi$ となり，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ は成立。

次に，$a_n>\pi$ のときは，平均値の定理より，

$$f(a_n)-f(\pi)=f'(b_n)(a_n-\pi)\ \ (\pi<b_n<a_n)$$

すると，$a_{n+1}-\pi=f(a_n)-f(\pi)$ と合わせて，

$$|a_{n+1}-\pi|=|f(a_n)-f(\pi)|=|f'(b_n)||a_n-\pi|\ \ (\pi<b_n<a_n)$$

ここで，(1)から $0<f'(b_n)\leqq\frac{2}{\pi}$ なので，$|f'(b_n)||a_n-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ となり，

$$|a_{n+1}-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$$

以上より，すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ が成り立ち，

$$|a_n-\pi|\leqq|a_1-\pi|\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}=(c-\pi)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$$

すると，$n\to\infty$ のとき $(c-\pi)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}\to 0$ となるので，$\lim_{n\to\infty}|a_n-\pi|=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\pi$$

［解　説］

平均値の定理を利用して，数列の極限を求める有名問題です。

$\boxed{6}$　　問題のページへ

(1)　3 点$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha^2)$に対して，$\triangle\mathrm{OAB}$は直角三角形より，

(a)　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$のとき　$\arg\alpha=\theta$とおくと$\arg\alpha^2=2\theta$となり，nを整数として，

$$2\theta-\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi,\quad \theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

ところが，これはαが純虚数でないことに反する。

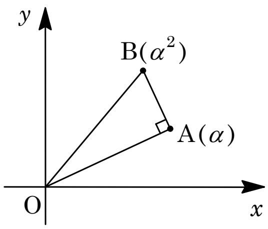
(b)　$\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{\pi}{2}$のとき　辺 OA が斜辺となるので，$\mathrm{OA}>\mathrm{OB}$となり，

$$|\alpha|>|\alpha^2|=|\alpha|^2,\quad 1>|\alpha|$$

ところが，これは$|\alpha|>1$に反する。

(a)(b)より，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$である。

(2)　$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$より，$\mathrm{OB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{AB}^2$となり，



$$|\alpha^2|^2=|\alpha|^2+|\alpha^2-\alpha|^2$$

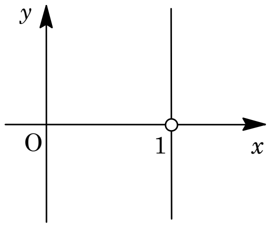
すると，$\alpha^2\overline{\alpha^2}=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha^2-\alpha)(\overline{\alpha^2-\alpha})$から，

$$\alpha^2(\overline{\alpha})^2=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha^2-\alpha)\{(\overline{\alpha})^2-\overline{\alpha}\}$$
$$=\alpha\overline{\alpha}+\alpha^2(\overline{\alpha})^2-\alpha^2\overline{\alpha}-\alpha(\overline{\alpha})^2+\alpha\overline{\alpha}$$

これより，$2\alpha\overline{\alpha}-\alpha^2\overline{\alpha}-\alpha(\overline{\alpha})^2=0$となり，

$$\alpha\overline{\alpha}(2-\alpha-\overline{\alpha})=0$$

$\alpha\overline{\alpha}>0$より，$2-\alpha-\overline{\alpha}=0$となり，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=1$



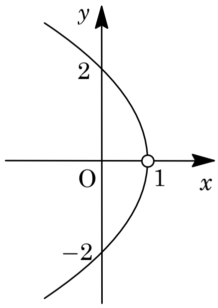
よって，αの実部は 1 となるので，α全体を図示すると右図の直線である。ただし，$\alpha=1$は除く。

(3)　(2)より，0 でない実数kをとり，$\alpha=1+ki$とおくと，

$$\alpha^2=(1+ki)^2=1-k^2+2ki\ (k\neq0)$$

ここで，$\alpha^2=x+yi$なので，$x=1-k^2$，$y=2k$となり，

$$x=1-\frac{y^2}{4}\quad(y\neq0)$$



よって，点$(x,\ y)$の軌跡を図示すると，右図の放物線となる。ただし，点$(1,\ 0)$は除く。

［解　説］

複素数と図形についての標準的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，解答例では三平方の定理を利用しました。