

1

解答解説のページへ

xy 平面上の 3 点 $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の内接円を T とする。点 $D(0, -1)$ を通り、傾きが正である直線を $l: y = ax - 1$ とする。

- (1) 円 T の半径を r とする。 r を求めよ。
- (2) 直線 l と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点のうち、 D と異なる点を E とする。点 E の座標を a を用いて表せ。
- (3) 直線 l が円 T に接するとする。このとき、(2) で求めた点 E を通り、 x 軸と平行な直線が、円 T に接することを示せ。

2

解答解説のページへ

xy 平面において、円 $x^2 + y^2 = 1$ の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ を満たす部分を C_1 とする。また、直線 $y = x$ の $x \leq 0$ を満たす部分を C_2 とする。 C_1 上の点 A 、 C_2 上の点 B および点 $P(-1, 0)$ について、 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ であるとする。点 A の座標を $(\cos \theta, \sin \theta)$ とする。

ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) 点 B の x 座標を θ を用いて表せ。
- (2) 線分 AB の中点の x 座標が 0 以上であるような θ の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

O を原点とする xy 平面上に 2 直線 $l: y = \sqrt{3}x$, $m: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ がある。正の整数 n に対して、 l 上に点 $P_n(n, \sqrt{3}n)$ をとり、 m 上に点 $Q_n(x_n, -\frac{1}{\sqrt{3}}x_n)$ をとる。ただし、 x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は次の条件 (I), (II) を満たすとする。

(I) $x_1 = 1$ である。

(II) $n \geq 2$ のとき、 x_n は、 Q_{n-1} を通り l と平行な直線と、 x 軸との交点の x 座標である。

また、正の整数 n に対して、 $\triangle OP_n Q_n$ の面積を a_n とする。

(1) x_n を n を用いて表せ。

(2) a_n を n を用いて表せ。

(3) 正の整数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ と定める。 S_n を n を用いて表せ。

1

問題のページへ

- (1) 3 点 $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を頂点とする
 $\triangle ABC$ に対して、その内接円 T の半径を r とすると、

$$AB = AC = \sqrt{2}, \quad BC = 2 \text{ から、}$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2)r = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1, \quad (\sqrt{2} + 1)r = 1$$

$$\text{これより、} r = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1 \text{ となる。}$$

- (2) 直線 $l: y = ax - 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ を連立して、

$$x^2 + (ax - 1)^2 = 1, \quad (a^2 + 1)x^2 - 2ax = 0$$

$$x \neq 0 \text{ の解は } x = \frac{2a}{a^2 + 1} \text{ となり、} \textcircled{1} \text{ から } y = a \cdot \frac{2a}{a^2 + 1} - 1 = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$$

$$\text{よって、} E\left(\frac{2a}{a^2 + 1}, \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right) \text{ となる。}$$

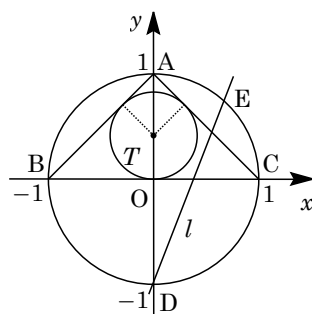
- (3) (1) から、二等辺三角形 ABC の内接円 T の中心の座標は $(0, \sqrt{2} - 1)$ 、半径は $\sqrt{2} - 1$ であり、 $l: ax - y - 1 = 0$ ($a > 0$) が円 T に接する条件は、

$$\frac{|a \cdot 0 - (\sqrt{2} - 1) - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{2} - 1, \quad \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{これより、} a^2 + 1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\right)^2 = (2 + \sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2} \text{ となり、}$$

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{6 + 4\sqrt{2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{(2 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}{9 - 8} = -2 + 2\sqrt{2}$$

すると、点 E を通り x 軸と平行な直線の方程式は $y = -2 + 2\sqrt{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$ であり、 T の中心 $(0, \sqrt{2} - 1)$ との距離は、 $(-2 + 2\sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 1$ となり、 T の半径に等しい。よって、直線 $\textcircled{2}$ は内接円 T に接する。



[解 説]

円と直線についての基本題です。(1)は面積を利用しましたが、他の方法もいろいろ考えられます。

2

問題のページへ

- (1) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $t \leq 0$ として, $A(\cos \theta, \sin \theta)$, $B(t, t)$,

$P(-1, 0)$ に対し,

$$\overrightarrow{PA} = (\cos \theta + 1, \sin \theta), \quad \overrightarrow{PB} = (t + 1, t)$$

ここで, $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ なので, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ となり,

$$(t + 1)(\cos \theta + 1) + t \sin \theta = 0$$

$$(\sin \theta + \cos \theta + 1)t + (\cos \theta + 1) = 0$$

$\sin \theta + \cos \theta + 1 > 0$ から $t = -\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta + 1}$ となり, この値は $t \leq 0$ を満たす。

よって, 点 B の x 座標は $x = -\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta + 1}$ である。

- (2) 線分 AB の中点の x 座標が 0 以上より, $\frac{1}{2} \left(\cos \theta - \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta + \cos \theta + 1} \right) \geq 0$ となり,

$$\cos \theta (\sin \theta + \cos \theta + 1) - (\cos \theta + 1) \geq 0, \quad \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - 1 \geq 0$$

$$\sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \geq 0, \quad \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta) \geq 0 \cdots \cdots (*)$$

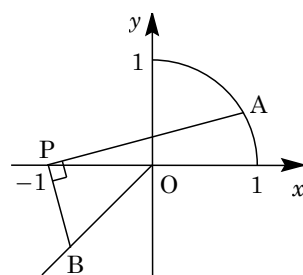
ここで, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $\sin \theta \geq 0$ となり,

(i) $\sin \theta = 0$ ($\theta = 0$) のとき (*) は成立する。

(ii) $\sin \theta > 0$ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) のとき (*) から $\cos \theta - \sin \theta \geq 0$

すると, $\cos \theta \geq \sin \theta$ から $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ となる。

(i)(ii) より, 求める θ の範囲は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ である。



[解 説]

三角関数の図形への応用問題です。基本的な内容ですが, (2)の詰めは要注意です。

3

問題のページへ

- (1) 直線 $l: y = \sqrt{3}x$ 上に点 $P_n(n, \sqrt{3}n)$, $m: y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 上に

点 $Q_n(x_n, -\frac{1}{\sqrt{3}}x_n)$ をとる。

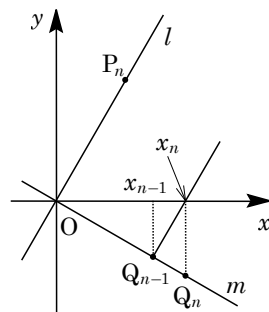
$n \geq 2$ のとき, 点 $Q_{n-1}(x_{n-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1})$ を通り l と平行な直線の方程式は,

$$y + \frac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1} = \sqrt{3}(x - x_{n-1})$$

この直線と x 軸との交点の x 座標が x_n より,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x_{n-1} = \sqrt{3}(x_n - x_{n-1}), \quad x_{n-1} = 3(x_n - x_{n-1})$$

これより $x_n = \frac{4}{3}x_{n-1}$ となり, $x_1 = 1$ から $x_n = x_1 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ である。



- (2) $\triangle OP_nQ_n$ の面積を a_n とすると, $l \perp m$ から,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} OP_n \cdot OQ_n = \frac{1}{2} \sqrt{n^2 + 3n^2} \cdot \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{3}x_n^2} = \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} |x_n| \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} n \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} n \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{\sqrt{3}}{2} n \left(\frac{4}{3}\right)^n \end{aligned}$$

- (3) (2)より, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{3}\right)^k$ とおくと, $T_n = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{4}{3}\right)^k$ とおくと,

$$\begin{aligned} T_n - \frac{4}{3}T_n &= 1 \cdot \frac{4}{3} + (2-1)\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \cdots + \{n - (n-1)\}\left(\frac{4}{3}\right)^n - n\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{4}{3} - 1} - n\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} = 4\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right\} - n\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \\ &= \left(4 - \frac{4}{3}n\right)\left(\frac{4}{3}\right)^n - 4 \end{aligned}$$

すると, $-\frac{1}{3}T_n = \left(4 - \frac{4}{3}n\right)\left(\frac{4}{3}\right)^n - 4$ から, $T_n = 4(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^n + 12$ となり,

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{2} T_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \{4(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^n + 12\} = 2\sqrt{3} \left\{(n-3)\left(\frac{4}{3}\right)^n + 3\right\}$$

[解 説]

数列の図形への応用題です。平易な内容ですが, (3)で(等差) $\times$ (等比)のタイプの和が出現しますので, 計算ミスを防ぐために細心の注意が必要です。