

1

[解答解説のページへ](#)

xy 平面において 2 つの円

$$C_1 : x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0, \quad C_2 : x^2 - 8x + y^2 - 4y + k = 0$$

が外接するとし、その接点を P とする。以下の問いに答えよ。

- (1) k の値を求めよ。
- (2) P の座標を求めよ。
- (3) 円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある。これらの 2 直線の交点 Q の座標を求めよ。

2

[解答解説のページへ](#)

$t = \sin \theta + \cos \theta$ とし, θ は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くものとする。

- (1) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ と $\cos 4\theta$ を, それぞれ t を用いて表せ。
- (3) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \cos 4\theta$ であるとき, t の値をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間において、3 点 $A(-2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面を α とする。2 点 $P(0, 5, 5)$, $Q(1, 1, 1)$ をとる。点 P を通り $\overrightarrow{OQ}$ に平行な直線を l とする。直線 l 上の点 R から平面 α に下ろした垂線と α の交点を S とする。 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ}$ (ただし k は実数) とおくとき、以下の問いに答えよ。

- (1) k を用いて、 $\overrightarrow{AS}$ を成分で表せ。
- (2) 点 S が $\triangle ABC$ の内部または周にあるような k の値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) 円 $C_1 : x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0$, 円 $C_2 : x^2 - 8x + y^2 - 4y + k = 0$ に対して,

$$C_1 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16, \quad C_2 : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 20-k$$

円 C_1 は中心 $A(1, -2)$ で半径 $r_1 = 4$, 円 C_2 は中心 $B(4, 2)$ で半径 $r_2 = \sqrt{20-k}$ である。ただし, $20-k > 0$ ($k < 20$) とする。

ここで, 円 C_1 と円 C_2 が外接することより, $AB = r_1 + r_2$ となり,

$$\sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = 4 + \sqrt{20-k}, \quad \sqrt{20-k} = 1$$

これより, $20-k=1$ となり $k=19$ である。なお, この値は $k < 20$ を満たす。

- (2) C_1 と C_2 の接点 P は線分 AB を $r_1 : r_2 = 4 : 1$ に内分する

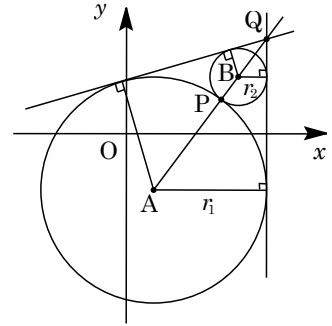
るので, その座標は,

$$\left(\frac{4 \cdot 4 + 1 \cdot 1}{4+1}, \frac{4 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)}{4+1} \right) = \left(\frac{17}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

- (3) C_1, C_2 の共通外接線の交点 Q は直線 AB 上にあり,

線分 AB を $r_1 : r_2 = 4 : 1$ に外分するので, その座標は,

$$\left(\frac{4 \cdot 4 - 1 \cdot 1}{4-1}, \frac{4 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)}{4-1} \right) = \left(5, \frac{10}{3} \right)$$



[解 説]

外接する 2 円を題材にした基本的な問題です。

2

問題のページへ

(1) $t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ に対して, θ が $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき,

$$-\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \text{ となるので,}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, \quad -1 < t \leq \sqrt{2}$$

(2) $t^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ より, $\sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2}$ となり,

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}t(3 - t^2) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

$$\cos 4\theta = 1 - 2 \sin^2 2\theta = 1 - 2(2 \sin \theta \cos \theta)^2 = 1 - 8(\sin \theta \cos \theta)^2$$

$$= 1 - 8\left(\frac{t^2 - 1}{2}\right)^2 = 1 - 2(t^2 - 1)^2 = -2t^4 + 4t^2 - 1$$

(3) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \cos 4\theta$ より, (2)から $-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t = -2t^4 + 4t^2 - 1$ となり,

$$4t^4 - t^3 - 8t^2 + 3t + 2 = 0, \quad (t-1)^2(4t^2 + 7t + 2) = 0$$

(1)から $-1 < t \leq \sqrt{2}$ なので, $t = 1, \frac{-7 + \sqrt{17}}{8}$ である。

[解 説]

誘導が非常に細かな三角方程式の基本題です。

3

問題のページへ

- (1) 点 $P(0, 5, 5)$ を通り, $\overrightarrow{OQ} = (1, 1, 1)$ に平行な直線上の点 R に対して,

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{OQ} = (0, 5, 5) + k(1, 1, 1) = (k, k+5, k+5)$$

ここで, 点 R から 3 点 $A(-2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面 α に下ろした垂線と α の交点 S

に対し, $\overrightarrow{AS} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$ (l, m は実数) とおくと,

$$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AR} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OA}$$

すると, $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 0, 1)$ から,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} &= l(2, 1, 0) + m(2, 0, 1) - (k, k+5, k+5) + (-2, 0, 0) \\ &= (2l+2m-k-2, l-k-5, m-k-5)\end{aligned}$$

さて, $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ より, $2(2l+2m-k-2) + (l-k-5) = 0$ となり,

$$5l + 4m = 3k + 9 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ より, $2(2l+2m-k-2) + (m-k-5) = 0$ となり,

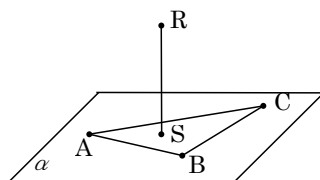
$$4l + 5m = 3k + 9 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } l = m = \frac{k+3}{3} \text{ となり, } \overrightarrow{AS} = \frac{k+3}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{k+3}{3}(4, 1, 1)$$

- (2) 点 S が $\triangle ABC$ の内部または周にある条件は, $l \geq 0$, $m \geq 0$, $l+m \leq 1$ より,

$$\frac{k+3}{3} \geq 0, \quad \frac{2(k+3)}{3} \leq 1$$

よって, $0 \leq k+3 \leq \frac{3}{2}$ から, $-3 \leq k \leq -\frac{3}{2}$ である。



[解 説]

空間図形の問題です。平面 α を扱うのに, 方程式とパラメータ表示という 2 つの方法がありますが, (2) の設問をみて後者を選択しました。