

1

解答解説のページへ

t, p を実数とし, $t > 0$ とする。 xy 平面において, 原点 O を中心とし点 $A(1, t)$ を通る円を C_1 とする。また, 点 A における C_1 の接線を l とする。直線 $x = p$ を軸とする 2 次関数のグラフ C_2 は, x 軸と接し, 点 A において直線 l とも接するとする。

- (1) 直線 l の方程式を t を用いて表せ。
- (2) p を t を用いて表せ。
- (3) C_2 と x 軸の接点を M とし, C_2 と y 軸の交点を N とする。 t が正の実数全体を動くとき, 三角形 OMN の面積の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

整数 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を、さいころをくり返し投げるにより、以下のように定めていく。まず、 $a_1 = 1$ とする。そして、正の整数 n に対し、 a_{n+1} の値を、 n 回目に出たさいころの目に応じて、次の規則で定める。

(規則) n 回目に出た目が 1, 2, 3, 4 なら $a_{n+1} = a_n$ とし、5, 6 なら $a_{n+1} = -a_n$ とする。

たとえば、さいころを 3 回投げ、その出た目が順に 5, 3, 6 であったとすると、 $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -1, a_4 = 1$ となる。

$a_n = 1$ となる確率を p_n とする。ただし、 $p_1 = 1$ とし、さいころのどの目も、出る確率は $\frac{1}{6}$ であるとする。

- (1) p_2, p_3 を求めよ。
- (2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。
- (3) $p_n \leq 0.5000005$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ。

ただし、 $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ であることを用いてよい。

3

解答解説のページへ

$0 < t < 1$ とする。平行四辺形 ABCD について、線分 AB, BC, CD, DA を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ A_1, B_1, C_1, D_1 とする。さらに、点 A_2, B_2, C_2, D_2 および A_3, B_3, C_3, D_3 を次の条件を満たすように定める。

(条件) $k=1, 2$ について、点 $A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1}$ は、それぞれ線分 $A_k B_k, B_k C_k, C_k D_k, D_k A_k$ を $t:1-t$ に内分する。

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{A_1 B_1} = p\vec{a} + q\vec{b}, \overrightarrow{A_1 D_1} = x\vec{a} + y\vec{b}$ を満たす実数 p, q, x, y を t を用いて表せ。
- (2) 四角形 $A_1 B_1 C_1 D_1$ は平行四辺形であることを示せ。
- (3) $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{A_3 B_3}$ が平行となるような t の値を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) $t > 0$ のとき、原点 O を中心とし、点 $A(1, t)$ を通る円

C_1 の方程式は、 $x^2 + y^2 = 1 + t^2$ である。

すると、点 A における C_1 の接線 l の方程式は、

$$x + ty = 1 + t^2, \quad y = -\frac{1}{t}x + t + \frac{1}{t}$$

- (2) 直線 $x = p$ を軸とし、 x 軸と接する 2 次関数のグラフ

C_2 は、 $a \neq 0$ として、

$$y = a(x - p)^2, \quad y' = 2a(x - p)$$

グラフ C_2 は点 A において直線 l と接することより、

$$t = a(1 - p)^2 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad -\frac{1}{t} = 2a(1 - p) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②から $p \neq 1$ なので $a = -\frac{1}{2t(1 - p)}$ となり、①に代入すると $t = -\frac{1}{2t}(1 - p)$ から、

$$2t^2 = -1 + p, \quad p = 2t^2 + 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

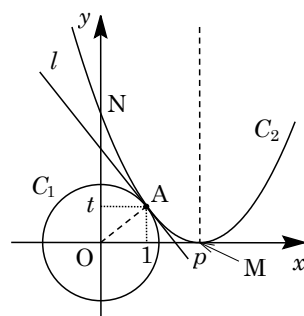
- (3) ①③より $t = a(1 - 2t^2 - 1)^2$ となり、 $a = \frac{t}{4t^4} = \frac{1}{4t^3}$ から $C_2: y = \frac{1}{4t^3}(x - 2t^2 - 1)^2$

これより、 $M(2t^2 + 1, 0)$ 、 $N\left(0, \frac{(2t^2 + 1)^2}{4t^3}\right)$ となり、 $\triangle OMN$ の面積 S は、

$$S = \frac{1}{2}(2t^2 + 1) \cdot \frac{(2t^2 + 1)^2}{4t^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{2t^2 + 1}{t}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(2t + \frac{1}{t}\right)^3$$

すると、 $2t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{2}$ (等号は $2t = \frac{1}{t}$ すなわち $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき成立) より、

$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、 S は最小値 $\frac{1}{8}(2\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ をとる。



[解 説]

円と放物線を題材にした頻出問題です。(3)は微分法を利用することも考えられます。

2

問題のページへ

- (1) 整数 $a_1, a_2, a_3, \dots$ に対し、与えられた規則により、 $a_{n+1} = a_n$ となる確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $a_{n+1} = -a_n$ となる確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。

ここで、 $a_n = 1$ となる確率を p_n とすると、 $a_1 = 1$ から $p_1 = 1$ であり、

$$p_2 = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}(1-p_1) = \frac{2}{3}, \quad p_3 = \frac{2}{3}p_2 + \frac{1}{3}(1-p_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

- (2) a_n と a_{n+1} の値について、その状態の推移をまとめる

と右図のようになり、

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1-p_n) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$$

- (3) (2)より、 $p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$ となり、

$$p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

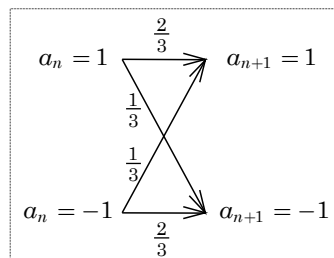
これより、 $p_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ となり、 $p_n \leq 0.5000005$ から、

$$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leq 1.000001, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leq 0.000001 = \frac{1}{10^6}, \quad 3^{n-1} \geq 10^6$$

すると、 $(n-1)\log_{10} 3 \geq 6$ となり、 $n \geq 1 + \frac{6}{\log_{10} 3} \dots\dots\dots(*)$

ここで、 $0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$ から $12.5 = \frac{6}{0.48} < \frac{6}{\log_{10} 3} < \frac{6}{0.47} < 12.8$ となり、

(*)を満たす最小の正の整数 n は、 $1+13=14$ である。



[解 説]

確率と漸化式の基本題に対数計算が加味されています。なお、確率分野の出題は、この図書館が開館して以来、初めてのことです。

3

問題のページへ

- (1) 平行四辺形 ABCD について、線分 AB, BC, CD, DA を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ A_1, B_1, C_1, D_1 とする。

ここで、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とするとき、

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AA_1} = (\vec{a} + t\vec{b}) - t\vec{a} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AA_1} = (1-t)\vec{b} - t\vec{a} = -t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

さて、 $\overrightarrow{A_1B_1} = p\vec{a} + q\vec{b}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = x\vec{a} + y\vec{b}$ と表すとき、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立なので、

$$p = 1-t, \quad q = t, \quad x = -t, \quad y = 1-t$$

- (2) $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB_1} = \{\vec{b} + (1-t)\vec{a}\} - (\vec{a} + t\vec{b}) = -t\vec{a} + (1-t)\vec{b} = \overrightarrow{A_1D_1}$

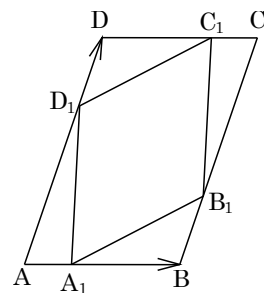
これより、四角形 $A_1B_1C_1D_1$ は平行四辺形である。

- (3) 条件より、 $\overrightarrow{A_2B_2} = (1-t)\overrightarrow{A_1B_1} + t\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{A_2D_2} = -t\overrightarrow{A_1B_1} + (1-t)\overrightarrow{A_1D_1}$ となり、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_3B_3} &= (1-t)\overrightarrow{A_2B_2} + t\overrightarrow{A_2D_2} \\ &= (1-t)\{(1-t)\overrightarrow{A_1B_1} + t\overrightarrow{A_1D_1}\} + t\{-t\overrightarrow{A_1B_1} + (1-t)\overrightarrow{A_1D_1}\} \\ &= (1-2t)\overrightarrow{A_1B_1} + (2t-2t^2)\overrightarrow{A_1D_1} \\ &= (1-2t)\{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} + (2t-2t^2)\{-t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\} \\ &= (1-3t+2t^3)\vec{a} + (3t-6t^2+2t^3)\vec{b} \end{aligned}$$

ここで、 $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{A_3B_3}$ から $1-3t+2t^3 = 0$ となり、 $(t-1)(2t^2+2t-1) = 0$

すると、 $0 < t < 1$ から、 $t = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ である。



[解 説]

平行四辺形とベクトルについての基本題です。