1

解答解説のページへ

曲線$C: y = x - x^3$上の点A$(1,\ 0)$における接線を l とし，C と l の共有点のうち A とは異なる点を B とする。また，$-2 < t < 1$とし，C 上の点P$(t,\ t - t^3)$をとる。さらに，三角形ABPの面積を$S(t)$とする。

(1)　点Bの座標を求めよ。

(2)　$S(t)$を求めよ。

(3)　tが$-2 < t < 1$の範囲を動くとき，$S(t)$の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$\alpha,\ \beta$ を実数とし，$\alpha > 1$ とする。曲線 $C_1 : y = |x^2 - 1|$ と曲線 $C_2 : y = -(x-\alpha)^2 + \beta$ が，点$(\alpha,\ \beta)$と点$(p,\ q)$の 2 点で交わるとする。また，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とし，x 軸，直線 $x = \alpha$，および C_1 の $x \geqq 1$ を満たす部分で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1)　p を α を用いて表し，$0 < p < 1$ であることを示せ。

(2)　S_1 を α を用いて表せ。

(3)　$S_1 > S_2$ であることを示せ。

3

解答解説のページへ

座標空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 ABCD が，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$ を満たしているとする。また三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を r を用いて表せ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の最大値を r を用いて表せ。さらに，最大値をとるときの点 P に対して，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|$ を r を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1)　曲線 $C: y = x - x^3 = -x(x-1)(x+1)$ ……①に対して，$y' = 1 - 3x^2$ となるので，点 A$(1,\ 0)$ における接線 l について，傾きが $y' = 1 - 3 = -2$ から，その方程式は，

$$y = -2(x-1) \cdots\cdots\cdots ②$$

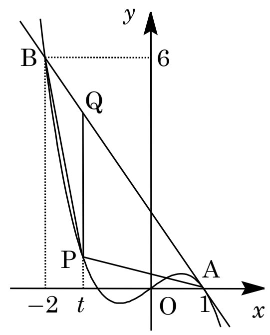
①②を連立して，$-x(x-1)(x+1) = -2(x-1)$ となり，

$$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0,\ (x-1)^2(x+2) = 0$$

すると，$x \neq 1$ の解は $x = -2$，このとき②から $y = 6$ となる。

よって，点 B の座標は $(-2,\ 6)$ である。

(2)　$-2 < t < 1$ のとき，点 P$(t,\ t - t^3)$ に対し，直線 $x = t$ と接線 l の交点を Q とおくと，Q$(t,\ -2(t-1))$ となる。



ここで，△ABP の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t) = \frac{1}{2}\cdot \text{PQ}\cdot\{1-(-2)\} = \frac{3}{2}\{-2(t-1) - (t - t^3)\}$$
$$= \frac{3}{2}(t^3 - 3t + 2)$$

(3)　$S'(t) = \frac{3}{2}(3t^2 - 3) = \frac{9}{2}(t-1)(t+1)$

これより，$-2 < t < 1$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	0
$S(t)$	0	↗	6	↘	0

したがって，$S(t)$ の最大値は，

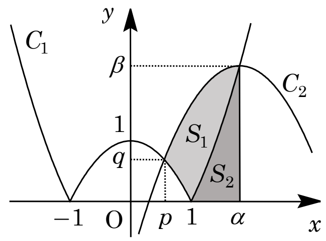
$$S(-1) = 6$$

［解　説］

3 次曲線の接線をもとにした基本題です。設問が(3)だけでもいいような……。

2

問題のページへ



(1)　2 曲線 $C_1 : y=\left|x^2-1\right|$，$C_2 : y=-(x-\alpha)^2+\beta$ が，ともに 2 点 $(\alpha,\ \beta)$，$(p,\ q)$ を通り，$\alpha>1$ から，

$$\beta=\alpha^2-1\ \cdots\cdots\cdots①,\quad q=\left|p^2-1\right|\cdots\cdots\cdots②$$

$$q=-(p-\alpha)^2+\beta\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$q=-(p-\alpha)^2+\alpha^2-1$ となり，

$$q=-p^2+2\alpha p-1\ \cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$\left|p^2-1\right|=-p^2+2\alpha p-1\ \cdots\cdots\cdots⑤$

(i)　$p^2-1\geqq 0\ (p\leqq -1,\ 1\leqq p)$ のとき　⑤から $p^2-1=-p^2+2\alpha p-1$

すると，$2p^2-2\alpha p=0$ となり $p=0,\ \alpha$ であるが，$p\leqq -1,\ 1\leqq p$ かつ $p\neq\alpha$ より，ともに適さない。

(ii)　$p^2-1<0\ (-1<p<1)$ のとき　⑤から $-p^2+1=-p^2+2\alpha p-1$

すると，$2\alpha p-2=0$ となり $p=\dfrac{1}{\alpha}$ である。そして，$\alpha>1$ から $0<p<1$ となる。

なお，この範囲は $-1<p<1$ を満たしている。

(2)　①より $C_2 : y=-(x-\alpha)^2+\alpha^2-1=-x^2+2\alpha x-1$ となり，$p=\dfrac{1}{\alpha}$ から，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S_1 は,

$$S_1=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\{(-x^2+2\alpha x-1)-(-x^2+1)\}dx+\int_1^{\alpha}\{(-x^2+2\alpha x-1)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}(2\alpha x-2)dx+\int_1^{\alpha}(-2x^2+2\alpha x)dx=\Big[\alpha x^2-2x\Big]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}+\Big[-\frac{2}{3}x^3+\alpha x^2\Big]_1^{\alpha}$$

$$=\alpha\Big(1-\frac{1}{\alpha^2}\Big)-2\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big)-\frac{2}{3}(\alpha^3-1)+\alpha(\alpha^2-1)=\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{\alpha}-\frac{4}{3}$$

(3)　x 軸，直線 $x=\alpha$，および C_1 の $x\geqq 1$ を満たす部分で囲まれた図形の面積 S_2 は,

$$S_2=\int_1^{\alpha}(x^2-1)dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-x\Big]_1^{\alpha}=\frac{1}{3}(\alpha^3-1)-(\alpha-1)=\frac{1}{3}\alpha^3-\alpha+\frac{2}{3}$$

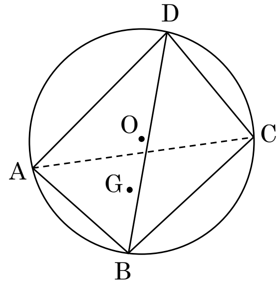
すると，$S_1-S_2=\dfrac{1}{\alpha}+\alpha-2=\dfrac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha}=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}>0$ より，$S_1>S_2$ である。

［解 説］

定積分と面積の問題です。非常に細かく誘導がついています。

3

問題のページへ



(1) 中心 O, 半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 ABCD に対して, △ABC の重心を G とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

条件より, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$ ……①なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(-\overrightarrow{\mathrm{OD}})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\text{………②}$$

(2) ①より, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\text{………③}$$

ここで, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=r$ なので, ③の両辺を 2 乗すると,

$$r^2+r^2+r^2+2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})=r^2$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-r^2$ ………④

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき, $F=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ とおく。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r^2\end{aligned}$$

同様にして, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r^2$

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r^2$$

すると, ①④から,

$$\begin{aligned}F&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3r^2\\&=-r^2+2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3r^2=2r^2+2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

$-r^2\leqq\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\leqq r^2$ より, F の最大値は $2r^2+2r^2=4r^2$ である。

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r^2$ すなわち P = D となり, ②から,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\left|-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|=\frac{4}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{4}{3}r$$

［解　説］

空間ベクトルの標準的な問題です。誘導に乗れば, 完答も難しくはないでしょう。