$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

曲線$C: y=x-x^3$上の点A$(1,\ 0)$における接線を l とし，C と l の共有点のうち A とは異なる点を B とする。また，$-2<t<1$とし，C 上の点P$(t,\ t-t^3)$をとる。さらに，三角形ABPの面積を$S(t)$とする。

(1) 点Bの座標を求めよ。

(2) $S(t)$を求めよ。

(3) tが$-2<t<1$の範囲を動くとき，$S(t)$の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

α, β を実数とし，$\alpha>1$ とする。曲線 $C_1: y=|x^2-1|$ と曲線 $C_2: y=-(x-\alpha)^2+\beta$ が，点 $(\alpha,\ \beta)$ と点 $(p,\ q)$ の 2 点で交わるとする。また，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とし，x 軸，直線 $x=\alpha$，および C_1 の $x\geqq 1$ を満たす部分で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1) p を α を用いて表し，$0<p<1$ であることを示せ。

(2) S_1 を α を用いて表せ。

(3) $S_1>S_2$ であることを示せ。

3

解答解説のページへ

座標空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 ABCD が，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$ を満たしているとする。また三角形 ABC の重心を G とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を r を用いて表せ。

(3)　点 P が球面 S 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の最大値を r を用いて表せ。さらに，最大値をとるときの点 P に対して，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PG}}\right|$ を r を用いて表せ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし，$f(x)=x+a\sin x$，$g(x)=b\cos x$ とする。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ を求めよ。

(2) 不等式 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2dx \geqq \int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ が成り立つことを示せ。

(3) 曲線 $y=|f(x)+g(x)|$，2 直線 $x=-\pi$，$x=\pi$，および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。このとき不等式 $V\geqq\dfrac{2}{3}\pi^2(\pi^2-6)$ が成り立つことを示せ。さらに，等号が成立するときの $a,\ b$ を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

$f(x)=x^{-2}e^{x}\ (x>0)$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする。また h を正の実数とする。さらに，正の実数 t に対して，曲線 C，2 直線 $x=t$，$x=t+h$，および x 軸で囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする。

(1)　$g'(t)$ を求めよ。

(2)　$g(t)$ を最小にする t がただ 1 つ存在することを示し，その t を h を用いて表せ。

(3)　(2)で得られた t を $t(h)$ とする。このとき極限値 $\displaystyle\lim_{h\to+0} t(h)$ を求めよ。

6

解答解説のページへ

i を虚数単位とする。複素数平面に関する以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $|z+2|=2|z-1|$ を満たす点 z の全体が表す図形は円であることを示し，その円の中心と半径を求めよ。

(2) 等式 $\{|z+2|-2|z-1|\}|z+6i|=3\{|z+2|-2|z-1|\}|z-2i|$ を満たす点 z の全体が表す図形を S とする。このとき S を複素数平面上に図示せよ。

(3) 点 z が(2)における図形 S 上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ で定義される点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1)　曲線$C: y = x - x^3 = -x(x-1)(x+1)$ ……①に対して，$y' = 1 - 3x^2$ となるので，点 A$(1,\ 0)$ における接線 l について，傾きが $y' = 1 - 3 = -2$ から，その方程式は，

$y = -2(x-1)$ ………②

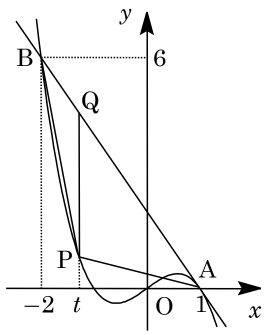
①②を連立して，$-x(x-1)(x+1) = -2(x-1)$ となり，

$(x-1)(x^2+x-2) = 0$，$(x-1)^2(x+2) = 0$

すると，$x \neq 1$ の解は $x = -2$，このとき②から $y = 6$ となる。

よって，点 B の座標は$(-2,\ 6)$である。

(2)　$-2 < t < 1$ のとき，点 P$(t,\ t-t^3)$ に対し，直線 $x = t$ と接線 l の交点を Q とおくと，Q$(t,\ -2(t-1))$ となる。



ここで，△ABP の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{PQ}\cdot\{1-(-2)\} = \frac{3}{2}\{-2(t-1)-(t-t^3)\}$$

$$= \frac{3}{2}(t^3 - 3t + 2)$$

(3)　$S'(t) = \frac{3}{2}(3t^2 - 3) = \frac{9}{2}(t-1)(t+1)$

これより，$-2 < t < 1$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。

したがって，$S(t)$ の最大値は，

$S(-1) = 6$

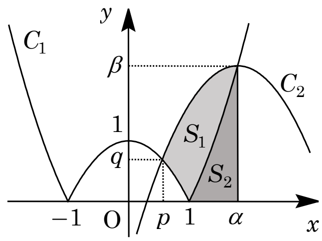
t	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	0
$S(t)$	0	↗	6	↘	0

［解　説］

3 次曲線の接線をもとにした基本題です。設問が(3)だけでもいいような……。

2

問題のページへ



(1)　2 曲線 $C_1 : y=|x^2-1|$，$C_2 : y=-(x-\alpha)^2+\beta$ が，ともに 2 点 $(\alpha,\ \beta)$，$(p,\ q)$ を通り，$\alpha>1$ から，

$$\beta=\alpha^2-1\cdots\cdots\text{①},\ q=|p^2-1|\cdots\cdots\text{②}$$

$$q=-(p-\alpha)^2+\beta\cdots\cdots\text{③}$$

①③より，$q=-(p-\alpha)^2+\alpha^2-1$ となり，

$$q=-p^2+2\alpha p-1\cdots\cdots\text{④}$$

②④より，$|p^2-1|=-p^2+2\alpha p-1\cdots\cdots$⑤

(i)　$p^2-1\geqq 0\ (p\leqq -1,\ 1\leqq p)$ のとき　⑤から $p^2-1=-p^2+2\alpha p-1$

すると，$2p^2-2\alpha p=0$ となり $p=0,\ \alpha$ であるが，$p\leqq -1,\ 1\leqq p$ かつ $p\neq\alpha$ より，ともに適さない。

(ii)　$p^2-1<0\ (-1<p<1)$ のとき　⑤から $-p^2+1=-p^2+2\alpha p-1$

すると，$2\alpha p-2=0$ となり $p=\dfrac{1}{\alpha}$ である。そして，$\alpha>1$ から $0<p<1$ となる。

なお，この範囲は $-1<p<1$ を満たしている。

(2)　①より $C_2 : y=-(x-\alpha)^2+\alpha^2-1=-x^2+2\alpha x-1$ となり，$p=\dfrac{1}{\alpha}$ から，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S_1 は，

$$S_1=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\{(-x^2+2\alpha x-1)-(-x^2+1)\}dx+\int_{1}^{\alpha}\{(-x^2+2\alpha x-1)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}(2\alpha x-2)dx+\int_{1}^{\alpha}(-2x^2+2\alpha x)dx=\Big[\alpha x^2-2x\Big]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}+\Big[-\frac{2}{3}x^3+\alpha x^2\Big]_{1}^{\alpha}$$

$$=\alpha\Big(1-\frac{1}{\alpha^2}\Big)-2\Big(1-\frac{1}{\alpha}\Big)-\frac{2}{3}(\alpha^3-1)+\alpha(\alpha^2-1)=\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{\alpha}-\frac{4}{3}$$

(3)　x 軸，直線 $x=\alpha$，および C_1 の $x\geqq 1$ を満たす部分で囲まれた図形の面積 S_2 は，

$$S_2=\int_{1}^{\alpha}(x^2-1)dx=\Big[\frac{1}{3}x^3-x\Big]_{1}^{\alpha}=\frac{1}{3}(\alpha^3-1)-(\alpha-1)=\frac{1}{3}\alpha^3-\alpha+\frac{2}{3}$$

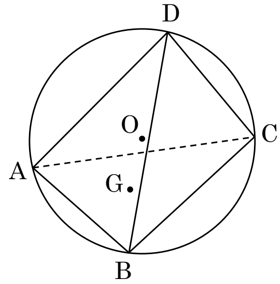
すると，$S_1-S_2=\dfrac{1}{\alpha}+\alpha-2=\dfrac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha}=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}>0$ より，$S_1>S_2$ である。

［解　説］

定積分と面積の問題です。非常に細かく誘導がついています。

3

問題のページへ



(1)　中心 O, 半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 ABCD に対して，△ABC の重心を G とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$……①なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(-\overrightarrow{\mathrm{OD}})=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdots\cdots\cdots②$$

(2)　①より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=r$ なので，③の両辺を 2 乗すると，

$$r^2+r^2+r^2+2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})=r^2$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-r^2\cdots\cdots\cdots④$

(3)　点 P が球面 S 上を動くとき，$F=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ とおく。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r^2\end{aligned}$$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r^2$

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r^2$$

すると，①④から，

$$\begin{aligned}F&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3r^2\\&=-r^2+2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3r^2=2r^2+2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

$-r^2\leqq\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\leqq r^2$ より，F の最大値は $2r^2+2r^2=4r^2$ である。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r^2$ すなわち $\mathrm{P}=\mathrm{D}$ となり，②から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\left|-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|=\frac{4}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=\frac{4}{3}r$$

［解 説］

空間ベクトルの標準的な問題です。誘導に乗れば，完答も難しくはないでしょう。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=x+a\sin x$，$g(x)=b\cos x$ のとき，

$$f(-x)=-x+a\sin(-x)=-(x+a\sin x)=-f(x)$$

$$g(-x)=b\cos(-x)=b\cos x=g(x)$$

これより，$f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)$ となり，$f(x)g(x)$ は奇関数なので，

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　$I=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2dx-\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ とおくと，①から，

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}[2f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]dx=2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}\{g(x)\}^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\{g(x)\}^2dx\geqq 0$$ （等号は $g(x)=0$ のときに成立）

よって，$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2dx\geqq\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx \cdots\cdots\cdots ②$

(3)　曲線 $y=|f(x)+g(x)|\geqq 0$ と 2 直線 $x=-\pi$，$x=\pi$，および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とすると，②より，

$$V=\pi\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2dx\geqq\pi\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$J=\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ とおくと，$\{f(x)\}^2$ は偶関数なので，

$$J=2\int_{0}^{\pi}\{f(x)\}^2dx=2\int_{0}^{\pi}(x^2+2ax\sin x+a^2\sin^2x)dx$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}-4a\left[x\cos x\right]_0^{\pi}+4a\int_0^{\pi}\cos x\,dx+2a^2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi^3+4a\pi+0+a^2\cdot\pi=\pi a^2+4\pi a+\frac{2}{3}\pi^3=\pi(a+2)^2+\frac{2}{3}\pi^3-4\pi$$

$$\geqq\frac{2}{3}\pi^3-4\pi=\frac{2}{3}\pi(\pi^2-6)$$ （等号は $a=-2$ のときに成立）

これより，$\pi\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx=\pi J\geqq\frac{2}{3}\pi^2(\pi^2-6) \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$V\geqq\frac{2}{3}\pi^2(\pi^2-6) \cdots\cdots\cdots ⑤$

③で等号が成立するのは $g(x)=0$ すなわち $b=0$ のとき，④で等号が成立するのは $a=-2$ のときなので，⑤の等号は $a=-2$ かつ $b=0$ のときに成立する。

［解　説］

定積分の計算問題です。積分区間と被積分関数に着目して，計算量を減らしています。なお，誘導に従えば，(3)の結論である⑤式までスムーズに流れます。

5

問題のページへ

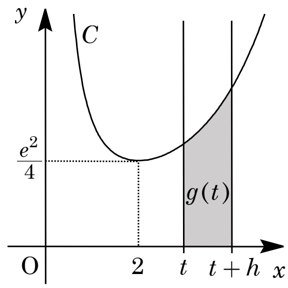
(1)　$f(x)=x^{-2}e^{x}$ に対して，

$$f'(x)=-2x^{-3}e^{x}+x^{-2}e^{x}=x^{-3}e^{x}(-2+x)$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$	×	↘	$\dfrac{e^2}{4}$	↗

そして，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ に注意すると，右図が曲線 $C: y=f(x)$ の概形である。



さて，$h>0$，$t>0$ のとき，曲線 C，2 直線 $x=t$，$x=t+h$，および x 軸で囲まれた図形の面積 $g(t)$ は，$F'(x)=f(x)$ とおくと，

$$g(t)=\int_{t}^{t+h}f(x)dx=F(t+h)-F(t)$$

$$\begin{aligned}g'(t)&=F'(t+h)\cdot 1-F'(t)=f(t+h)-f(t)\\&=(t+h)^{-2}e^{t+h}-t^{-2}e^{t}=t^{-2}(t+h)^{-2}e^{t}\{t^2e^h-(t+h)^2\}\\&=t^{-2}(t+h)^{-2}e^{t}\{(e^h-1)t^2-2ht-h^2\}\end{aligned}$$

(2)　$h(t)=(e^h-1)t^2-2ht-h^2$ とおくと，(1)から，$g'(t)=t^{-2}(t+h)^{-2}e^{t}h(t)$ となる。

ここで，$h>0$ より，$e^h-1>0$ かつ $h(0)=-h^2<0$ となり，$h(t)=0$ は $t>0$ にただ 1 つの解をもち，これを $t=\alpha$ とおくと，

$$\alpha=\frac{h+\sqrt{h^2+(e^h-1)h^2}}{e^h-1}=\frac{h+\sqrt{e^hh^2}}{e^h-1}=\frac{h\left(1+e^{\frac{h}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{h}{2}}-1\right)\left(e^{\frac{h}{2}}+1\right)}=\frac{h}{e^{\frac{h}{2}}-1}$$

$g'(t)$ の符号と $h(t)$ の符号は一致することより，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(t)$	×	$-$	0	$+$
$g(t)$	×	↘		↗

よって，$g(t)$ を最小にする t はただ 1 つ存在し，その値は $t=\alpha=\dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}}-1}$ である。

(3)　$t(h)=\dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}}-1}$ から $h'=\dfrac{h}{2}$ とおくと，$h\to+0$ のとき $h'\to+0$ となり，

$$\lim_{h\to+0}t(h)=\lim_{h'\to+0}\frac{2h'}{e^{h'}-1}=2\lim_{h'\to+0}\frac{h'}{e^{h'}-1}=2$$

［解　説］

微分と増減の問題に関数の極限を融合した問題です。(1)で記した曲線 C の概形は必須ではありませんが，(3)の結果を予想するのには役立ちます。

6

問題のページへ

(1)　$|z+2|=2|z-1|$に対して，$|z+2|^2=4|z-1|^2$より，

$$(z+2)(\overline{z}+2)=4(z-1)(\overline{z}-1),\ \ z\overline{z}+2z+2\overline{z}+4=4(z\overline{z}-z-\overline{z}+1)$$

まとめると，$z\overline{z}-2z-2\overline{z}=0$となり，$(z-2)(\overline{z}-2)=4$より，

$$|z-2|^2=4,\ \ |z-2|=2$$

これより，点zの表す図形は，中心が点2で半径が2の円である。

(2)　$\{|z+2|-2|z-1|\}|z+6i|=3\{|z+2|-2|z-1|\}|z-2i|$……①に対して，

$$\{|z+2|-2|z-1|\}\{|z+6i|-3|z-2i|\}=0$$

これより，$|z+2|=2|z-1|$または$|z+6i|=3|z-2i|$である。

・$|z+2|=2|z-1|$のとき　(1)から$|z-2|=2$………②

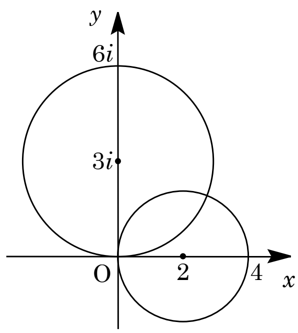
・$|z+6i|=3|z-2i|$のとき　$|z+6i|^2=9|z-2i|^2$より，

$$(z+6i)(\overline{z}-6i)=9(z-2i)(\overline{z}+2i)$$

$$z\overline{z}-6iz+6i\overline{z}+36=9(z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}+4)$$

まとめると，$z\overline{z}+3iz-3i\overline{z}=0$となり，$(z-3i)(\overline{z}+3i)=9$より，

$$|z-3i|^2=9,\ \ |z-3i|=3\text{………③}$$



したがって，①を満たす点zが表す図形Sは，②より中心が点2で半径が2の円，③より中心が点$3i$で半径が3の円を合わせた2つの円である。

これより，Sを複素数平面上に図示すると，右図のようになる。

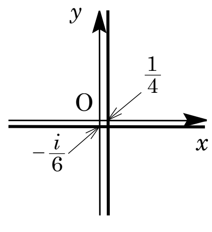
(3)　点zが図形S上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}\ (z\neq 0)$で定義される点$w$が描く図形について，$z=\dfrac{1}{w}$を②と③に代入すると，

・$|z-2|=2$のとき　$\left|\dfrac{1}{w}-2\right|=2$となり，$\dfrac{|1-2w|}{|w|}=2$から$|-2|\left|w-\dfrac{1}{2}\right|=2|w|$

すると，$\left|w-\dfrac{1}{2}\right|=|w|$より，点$w$は点$\dfrac{1}{2}$と原点を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。

・$|z-3i|=3$のとき　$\left|\dfrac{1}{w}-3i\right|=3$となり，$\dfrac{|1-3iw|}{|w|}=3$から$|-3i|\left|w-\dfrac{1}{3i}\right|=3|w|$

すると，$\left|w-\dfrac{1}{3i}\right|=|w|$すなわち$\left|w+\dfrac{i}{3}\right|=|w|$より，点$w$は点$-\dfrac{i}{3}$と原点を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。



したがって，点wが描く図形は，右図の$x=\dfrac{1}{4}$，$y=-\dfrac{1}{6}$で表される2直線である。

［解 説］

複素数平面上におけるアポロニウスの円を題材とした基本題です。(3)の変換も頻出タイプです。