

|   |
|---|
| 1 |
|---|

[解答解説のページへ](#)

$\triangle OAB$  において、 $OA = OB = 4$ ， $AB = 2$  とする。 $\angle OAB$  の二等分線と線分  $OB$  の交点を  $C$  とし、点  $O$  から直線  $AC$  に垂線  $OD$  を引く。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおく。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\overrightarrow{AC}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (2)  $\overrightarrow{OD}$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  を用いて表せ。
- (3)  $\triangle BCD$  の面積を求めよ。

**2**[解答解説のページへ](#)

以下の問いに答えよ。

- (1)  $x > 1$ ,  $y > 1$  のとき, 不等式  $\log_x y + \log_y x \geq 2$  が成り立つことを示せ。
- (2) 座標平面において, 連立不等式  $x > 1$ ,  $y > x$ ,  $\log_x y + \log_y x < \frac{5}{2}$  の表す領域を図示せよ。
- (3) (2)の領域の中で  $x^2 + y^2 < 12$  を満たす部分に境界線を含めた図形を  $D$  とする。 $D$  の面積を求めよ。

**3**[解答解説のページへ](#)

$f(x) = x(x+1)(x-1)$  とする。座標平面において、曲線  $y = f(x)$  を  $C$  とし、曲線  $C$  上の点  $(t, f(t))$  における接線を  $L$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線  $L$  の方程式を  $t$  を用いて表せ。
- (2)  $t \neq 0$  のとき、直線  $L$  と曲線  $C$  の共有点で、点  $(t, f(t))$  とは異なるものを  $(a, f(a))$  とする。 $a$  を  $t$  を用いて表せ。また、 $t$  が  $0$  を除いた実数を動くとき、 $f'(t)f'(a)$  の最小値を求めよ。
- (3) 次の条件(A)を満たすような実数  $t$  の範囲を求めよ。  
(A) 曲線  $C$  上の点  $(s, f(s))$  における接線が直線  $L$  と直交するような実数  $s$  が存在する。

1

問題のページへ

- (1)  $OA = OB = 4$ ,  $AB = 2$  である  $\triangle OAB$  において,  $\angle OAB$  の二等分線と線分  $OB$  の交点を  $C$  とし, 点  $O$  から直線  $AC$  に垂線  $OD$  を引く。そして,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおく。

このとき,  $OC : CB = AO : AB = 2 : 1$  より,  $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{b}$  となり,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

- (2)  $k$  を実数として,  $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AC}$  とおくと,

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AC} = \vec{a} + k\left(-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = (1-k)\vec{a} + \frac{2}{3}k\vec{b}$$

さて,  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$  であり,  $\triangle OAB$  に余弦定理を適用すると,

$$2^2 = 4^2 + 4^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 14$$

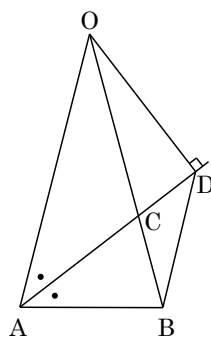
ここで,  $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AC}$  から  $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  となり,  $\left\{(1-k)\vec{a} + \frac{2}{3}k\vec{b}\right\} \cdot \left(-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = 0$

$$-(1-k) \cdot 16 + \frac{2}{3}(1-k) \cdot 14 - \frac{2}{3}k \cdot 14 + \frac{4}{9}k \cdot 16 = 0$$

これより,  $\frac{40}{9}k - \frac{20}{3} = 0$  となり  $k = \frac{3}{2}$  であるので,  $\overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

- (3)  $OC : CB = 2 : 1$  で,  $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$  から  $AC : CD = 2 : 1$  となるので,

$$\triangle BCD = \frac{1}{3}\triangle OBD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\triangle OAB = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{4^2 - 1^2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{6}$$



### [解 説]

基本的な平面ベクトルの図形への応用問題です。

2

問題のページへ

- (1)  $x > 1, y > 1$  のとき  $\log_x y > \log_x 1 = 0$  から、相加平均と相乗平均の関係より、

$$\log_x y + \log_y x = \log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq 2\sqrt{\log_x y \cdot \frac{1}{\log_x y}} = 2$$

- (2)  $x > 1, y > x, \log_x y + \log_y x < \frac{5}{2}$  のとき、 $\log_x y > \log_x x = 1$  となり、

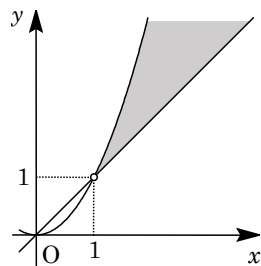
$$\log_x y + \frac{1}{\log_x y} < \frac{5}{2}, \quad 2(\log_x y)^2 - 5\log_x y + 2 < 0$$

すると、 $(2\log_x y - 1)(\log_x y - 2) < 0$  から  $\frac{1}{2} < \log_x y < 2$  となり、 $\log_x y > 1$  と合わせると  $1 < \log_x y < 2$  から、

$$x < y < x^2$$

よって、領域  $x > 1, y > x, \log_x y + \log_y x < \frac{5}{2}$  を図示する

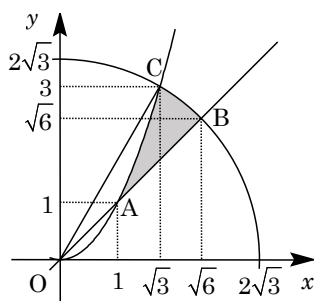
と、右図の網点部となる。ただし、境界は領域に含まない。



- (3) (2)の領域の中で、 $x^2 + y^2 < 12$  を満たす部分に境界線を含めた図形  $D$  は右図の網点部である。

ここで、 $A(1, 1)$  とおき、円  $x^2 + y^2 = 12$  と直線  $y = x$ 、放物線  $y = x^2$  の第 1 象限の交点を、それぞれ  $B, C$  とおくと、 $B(\sqrt{6}, \sqrt{6})$ 、 $C(\sqrt{3}, 3)$  となる。

すると、直線  $OC$  の方程式は  $y = \sqrt{3}x$  で、 $OC$  と  $x$  軸の正の部分となす角は  $\frac{\pi}{3}$ 、また直線  $OB$  と  $x$  軸の正の



部分となす角は  $\frac{\pi}{4}$  から、 $\angle BOC = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$  となる。

これより、おうぎ形  $OBC$  の面積は  $\frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$  となり、 $D$  の面積  $S$  は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 (\sqrt{3}x - x) dx - \int_1^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}x - x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{2} - (\sqrt{3} - 1) \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + \frac{3\sqrt{3} - 1}{3} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

### [解説]

対数関数と領域の融合問題です。計算は量的には多めですが、煩雑ではありません。

3

問題のページへ

- (1)  $f(x) = x(x+1)(x-1) = x^3 - x$  に対して,  $f'(x) = 3x^2 - 1$  となる。

さて, 曲線  $C: y = f(x)$  上の点  $(t, t^3 - t)$  における接線  $L$  の方程式は,

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t), \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

- (2)  $L$  と  $C$  の共有点は,  $x^3 - x = (3t^2 - 1)x - 2t^3$  から,

$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0, \quad (x - t)^2(x + 2t) = 0$$

$x \neq t$  から  $x = -2t$  となり,  $a = -2t$  である。

ここで,  $g(t) = f'(t)f'(a)$  とおくと,

$$g(t) = f'(t)f'(-2t) = (3t^2 - 1)(12t^2 - 1)$$

$$= 36t^4 - 15t^2 + 1 = 36\left(t^2 - \frac{5}{24}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$t \neq 0$  から  $t^2 > 0$  となり,  $f'(t)f'(a)$  は  $t^2 = \frac{5}{24}$  のとき最小値  $-\frac{9}{16}$  をとる。

- (3) 点  $(s, f(s))$  における接線  $y = (3s^2 - 1)x - 2s^3$  が  $L$  と直交する条件は,

$$(3s^2 - 1)(3t^2 - 1) = -1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

そして, ①を満たす実数  $s$  が存在する  $t$  の条件を求める。

まず,  $3t^2 - 1 \neq 0$  ( $t \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ) のもとで,  $3s^2 = -\frac{1}{3t^2 - 1} + 1$  から,

$$-\frac{1}{3t^2 - 1} + 1 \geq 0, \quad 1 \geq \frac{1}{3t^2 - 1} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- (i)  $3t^2 - 1 > 0$  ( $t < -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} < t$ ) のとき ②から  $3t^2 - 1 \geq 1$  となる。

このとき,  $3t^2 - 1 > 0$  は満たし,  $3t^2 - 2 \geq 0$  から  $(\sqrt{3}t + \sqrt{2})(\sqrt{3}t - \sqrt{2}) \geq 0$

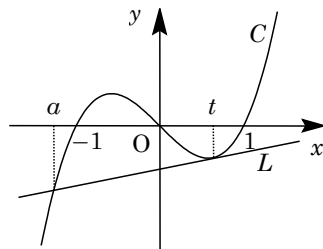
$$(3t + \sqrt{6})(3t - \sqrt{6}) \geq 0$$

これより,  $t \leq -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \leq t$  となる。

- (ii)  $3t^2 - 1 < 0$  ( $-\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$ ) のとき ②は成立している。

(i)(ii)より, ①を満たす実数  $s$  が存在する  $t$  の条件は,

$$t \leq -\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3} \leq t$$



### [解 説]

接線を題材とした問題ですが, メインの内容は式変形です。