$\boxed{1}$　解答解説のページへ

　$\triangle$OAB において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=4$，$\mathrm{AB}=2$ とする。$\angle$OAB の二等分線と線分 OB の交点を C とし，点 O から直線 AC に垂線 OD を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　$\triangle$BCD の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$x>1$，$y>1$のとき，不等式$\log_x y+\log_y x \geqq 2$が成り立つことを示せ。

(2)　座標平面において，連立不等式$x>1$，$y>x$，$\log_x y+\log_y x<\dfrac{5}{2}$の表す領域を図示せよ。

(3)　(2)の領域の中で$x^2+y^2<12$を満たす部分に境界線を含めた図形をDとする。Dの面積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$f(x)=x(x+1)(x-1)$ とする。座標平面において，曲線 $y=f(x)$ を C とし，曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を L とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 L の方程式を t を用いて表せ。

(2)　$t\neq 0$ のとき，直線 L と曲線 C の共有点で，点 $(t,\ f(t))$ とは異なるものを $(a,\ f(a))$ とする。a を t を用いて表せ。また，t が 0 を除いた実数を動くとき，$f'(t)f'(a)$ の最小値を求めよ。

(3)　次の条件(A)を満たすような実数 t の範囲を求めよ。

(A)　曲線 C 上の点 $(s,\ f(s))$ における接線が直線 L と直交するような実数 s が存在する。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

座標平面において，媒介変数表示 $x=-t\left(t-\dfrac{3}{2}\right)$，$y=\sin\pi t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 t\sin\pi t\,dt$ を求めよ。

(2) 実数 a に対し，曲線 C と直線 $x=a$ の共有点の個数を求めよ。

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

a と b は実数の定数とする。関数

$$f(x) = (1-2x^2)\cos 2x + 2x\sin 2x + a\cos^2 x + b\int_0^x t\sin 2t\,dt$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　$a = 8\pi^2$，$b = -4\pi$ のとき，$0 < x < \dfrac{3}{2}\pi$ において $f(x)$ が極値をとる x の値をすべて求めよ。

(2)　次の条件(B)を満たす $a,\ b$ を求めよ。

　(B)　$0 < x < \dfrac{3}{2}\pi$ において，$f(x)$ は極値をとらない。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

定数αは実数でない複素数とする。以下の問いに答えよ。

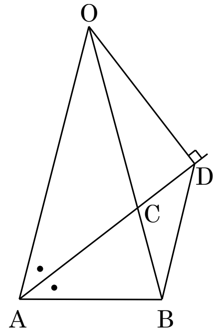
(1)　$\dfrac{\alpha-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$は純虚数であることを示せ。

(2)　純虚数βで，$\dfrac{\beta-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$が純虚数となるものがただ 1 つ存在することを示せ。

(3)　複素数zを$\dfrac{z-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}$が純虚数となるように動かすとき，$|z|$が最小となる$z$を$\alpha$を用いて表せ。

1

問題のページへ



(1)　$OA = OB = 4$，$AB = 2$である△OAB において，∠OABの二等分線と線分 OB の交点を C とし，点 O から直線 AC に垂線 OD を引く。そして，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$とおく。

このとき，$OC : CB = AO : AB = 2 : 1$より，$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\vec{b}$となり，

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

(2)　kを実数として，$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AC}$とおくと，

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AC} = \vec{a} + k\left(-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = (1-k)\vec{a} + \frac{2}{3}k\vec{b}$$

さて，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$であり，△OAB に余弦定理を適用すると，

$$2^2 = 4^2 + 4^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 14$$

ここで，$\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{AC}$から$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$となり，$\left\{(1-k)\vec{a} + \frac{2}{3}k\vec{b}\right\}\cdot\left(-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = 0$

$$-(1-k)\cdot 16 + \frac{2}{3}(1-k)\cdot 14 - \frac{2}{3}k\cdot 14 + \frac{4}{9}k\cdot 16 = 0$$

これより，$\frac{40}{9}k - \frac{20}{3} = 0$となり$k = \frac{3}{2}$であるので，$\overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$

(3)　$OC : CB = 2 : 1$で，$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$から$AC : CD = 2 : 1$となるので，

$$\triangle BCD = \frac{1}{3}\triangle OBD = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle OAB = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{4^2 - 1^2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

［解 説］

基本的な平面ベクトルの図形への応用問題です。

2

問題のページへ

(1)　$x>1$，$y>1$ のとき $\log_x y>\log_x 1=0$ から，相加平均と相乗平均の関係より，

$$\log_x y+\log_y x=\log_x y+\frac{1}{\log_x y}\geqq 2\sqrt{\log_x y\cdot\frac{1}{\log_x y}}=2$$

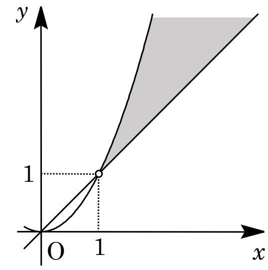
(2)　$x>1$，$y>x$，$\log_x y+\log_y x<\dfrac{5}{2}$ のとき，$\log_x y>\log_x x=1$ となり，

$$\log_x y+\frac{1}{\log_x y}<\frac{5}{2},\ 2(\log_x y)^2-5\log_x y+2<0$$

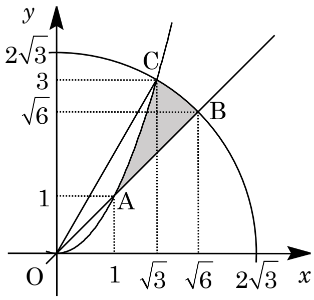
すると，$(2\log_x y-1)(\log_x y-2)<0$ から $\dfrac{1}{2}<\log_x y<2$ となり，$\log_x y>1$ と合わせると $1<\log_x y<2$ から，

$$x<y<x^2$$

よって，領域 $x>1$，$y>x$，$\log_x y+\log_y x<\dfrac{5}{2}$ を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



(3)　(2)の領域の中で，$x^2+y^2<12$ を満たす部分に境界線を含めた図形 D は右図の網点部である。



ここで，A(1, 1) とおき，円 $x^2+y^2=12$ と直線 $y=x$，放物線 $y=x^2$ の第 1 象限の交点を，それぞれ B, C とおくと，B$(\sqrt{6},\ \sqrt{6})$，C$(\sqrt{3},\ 3)$ となる。

すると，直線 OC の方程式は $y=\sqrt{3}x$ で，OC と x 軸の正の部分がなす角は $\dfrac{\pi}{3}$，また直線 OB と x 軸の正の部分がなす角は $\dfrac{\pi}{4}$ から，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$ となる。

これより，おうぎ形 OBC の面積は $\dfrac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$ となり，D の面積 S は，

$$\begin{aligned}S&=\frac{\pi}{2}-\int_0^1(\sqrt{3}x-x)\,dx-\int_1^{\sqrt{3}}(\sqrt{3}x-x^2)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}-(\sqrt{3}-1)\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1-\Big[\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\Big]_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2+\frac{3\sqrt{3}-1}{3}\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

［解　説］

対数関数と領域の融合問題です。計算は量的には多めですが，煩雑ではありません。

3

問題のページへ

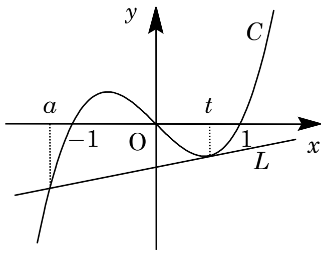
(1)　$f(x)=x(x+1)(x-1)=x^3-x$ に対して，$f'(x)=3x^2-1$ となる。

さて，曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $(t,\ t^3-t)$ における接線 L の方程式は，

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t),\ \ y=(3t^2-1)x-2t^3$$

(2)　L と C の共有点は，$x^3-x=(3t^2-1)x-2t^3$ から，

$$x^3-3t^2x+2t^3=0,\ \ (x-t)^2(x+2t)=0$$



$x\neq t$ から $x=-2t$ となり，$a=-2t$ である。

ここで，$g(t)=f'(t)f'(a)$ とおくと，

$$g(t)=f'(t)f'(-2t)=(3t^2-1)(12t^2-1)$$
$$=36t^4-15t^2+1=36\left(t^2-\frac{5}{24}\right)^2-\frac{9}{16}$$

$t\neq0$ から $t^2>0$ となり，$f'(t)f'(a)$ は $t^2=\dfrac{5}{24}$ のとき最小値 $-\dfrac{9}{16}$ をとる。

(3)　点 $(s,\ f(s))$ における接線 $y=(3s^2-1)x-2s^3$ が L と直交する条件は，

$$(3s^2-1)(3t^2-1)=-1 \cdots\cdots\cdots①$$

そして，①を満たす実数 s が存在する t の条件を求める。

まず，$3t^2-1\neq0$ $\left(t\neq\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ のもとで，$3s^2=-\dfrac{1}{3t^2-1}+1$ から，

$$-\frac{1}{3t^2-1}+1\geqq0,\ \ 1\geqq\frac{1}{3t^2-1}\cdots\cdots\cdots②$$

(i)　$3t^2-1>0$ $\left(t<-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}<t\right)$ のとき　②から $3t^2-1\geqq1$ となる。

このとき，$3t^2-1>0$ は満たし，$3t^2-2\geqq0$ から $(\sqrt{3}t+\sqrt{2})(\sqrt{3}t-\sqrt{2})\geqq0$

$$(3t+\sqrt{6})(3t-\sqrt{6})\geqq0$$

これより，$t\leqq-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\leqq t$ となる。

(ii)　$3t^2-1<0$ $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<t<\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ のとき　②は成立している。

(i)(ii)より，①を満たす実数 s が存在する t の条件は，

$$t\leqq-\frac{\sqrt{6}}{3},\ \ -\frac{\sqrt{3}}{3}<t<\frac{\sqrt{3}}{3},\ \ \frac{\sqrt{6}}{3}\leqq t$$

［解　説］

接線を題材とした問題ですが，メインの内容は式変形です。

4

問題のページへ

(1) $\displaystyle\int_0^1 t\sin\pi t\,dt=\Big[-\frac{1}{\pi}t\cos\pi t\Big]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\pi t\,dt=-\frac{1}{\pi}\cdot(-1)+\frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\Big]_0^1=\frac{1}{\pi}$

(2) 曲線 $C: x=-t\left(t-\frac{3}{2}\right)=-t^2+\frac{3}{2}t$，$y=\sin\pi t\ (0\leqq t\leqq 1)$ に対して，

$$\frac{dx}{dt}=-2t+\frac{3}{2}=-2\left(t-\frac{3}{4}\right)$$
$$\frac{dy}{dt}=\pi\cos\pi t$$

すると，$0\leqq t\leqq 1$ における x, y の値の増減は右表のようになる。

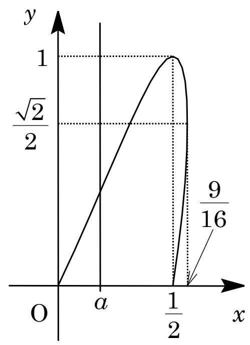
t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{9}{16}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0

これより，曲線 C の概形は右下図のようになり，C と直線 $x=a$ の共有点の個数は，

$a<0,\ \frac{9}{16}<a$ のとき 0 個

$0\leqq a<\frac{1}{2},\ a=\frac{9}{16}$ のとき 1 個

$\frac{1}{2}\leqq a<\frac{9}{16}$ のとき 2 個



(3) 曲線 C の $0\leqq t\leqq\frac{3}{4}$ の部分を $y=y_1(x)$，$\frac{3}{4}\leqq t\leqq 1$ の部分を $y=y_2(x)$ とおくと，C と x 軸で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{\frac{9}{16}}y_1(x)dx-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{16}}y_2(x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{3}{4}}(\sin\pi t)\left(-2t+\frac{3}{2}\right)dt-\int_1^{\frac{3}{4}}(\sin\pi t)\left(-2t+\frac{3}{2}\right)dt$$
$$=\int_0^1(\sin\pi t)\left(-2t+\frac{3}{2}\right)dt=-2\int_0^1 t\sin\pi t\,dt+\frac{3}{2}\int_0^1\sin\pi t\,dt$$
$$=-2\cdot\frac{1}{\pi}-\frac{3}{2}\Big[\frac{1}{\pi}\cos\pi t\Big]_0^1=-\frac{2}{\pi}-\frac{3}{2\pi}\cdot(-2)=\frac{1}{\pi}$$

［解　説］

パラメータ曲線と面積についての頻出問題です。

5

問題のページへ

(1)　$f(x)=(1-2x^2)\cos 2x+2x\sin 2x+a\cos^2 x+b\int_0^x t\sin 2t\,dt$ に対して，

$$f'(x)=-4x\cos 2x-2(1-2x^2)\sin 2x+2\sin 2x+4x\cos 2x-2a\cos x\sin x+bx\sin 2x$$
$$=-2(1-2x^2)\sin 2x+2\sin 2x-a\sin 2x+bx\sin 2x$$
$$=(4x^2+bx-a)\sin 2x$$

ここで，$a=8\pi^2$，$b=-4\pi$ のとき，

$$f'(x)=(4x^2-4\pi x-8\pi^2)\sin 2x=4(x+\pi)(x-2\pi)\sin 2x$$

すると，$0<x<\frac{3}{2}\pi$ において $(x+\pi)(x-2\pi)<0$ から，この区間における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，極値をとる x の値は $x=\frac{\pi}{2}$，π である。

(2)　$g(x)=4x^2+bx-a$ とおくと，(1)から $f'(x)=g(x)\sin 2x$ である。

さて，$0<x<\frac{3}{2}\pi$ において，$\sin 2x$ の符号変化は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

すると，$f(x)$ が極値をとらない，すなわち $f'(x)$ に符号変化がない条件は, 2 次関数 $g(x)$ が，$x=\frac{\pi}{2}$ の前後および $x=\pi$ の前後で符号変化があるときより，

$$g(x)=4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)=4x^2-6\pi x+2\pi^2$$

したがって，$a=-2\pi^2$，$b=-6\pi$ である。

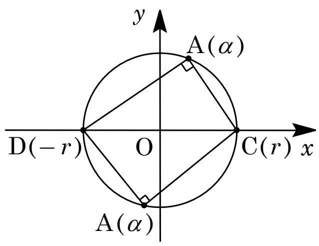
［解 説］

微分と増減の問題です。(2)の方針を立てるとき，(1)の具体例が誘導になっていることがわかります。

6

問題のページへ

(1)　まず，実数でない複素数αに対して$r=|\alpha|>0$とし，複素数平面上で，A(α)，C(r)，D$(-r)$とおくと，AC$\perp$ADである。

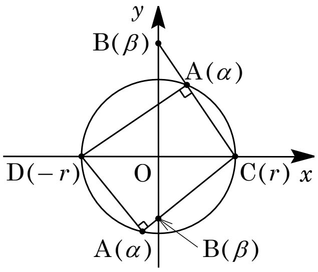


ここで，$u=\dfrac{\alpha-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}=\dfrac{\alpha-r}{\alpha+r}$とおくと，$u\neq 0$で，

$$\arg u=\arg\frac{\alpha-r}{\alpha+r}=\arg\frac{\alpha-r}{\alpha-(-r)}=\pm\frac{\pi}{2}$$

したがって，uは純虚数である。

(2)　純虚数βに対し，複素数平面上でB(β)とおく。



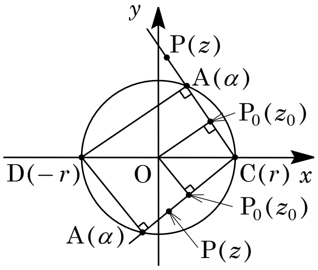
$v=\dfrac{\beta-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}=\dfrac{\beta-r}{\alpha+r}$とおくと，$v$は純虚数なので，

$$\arg v=\arg\frac{\beta-r}{\alpha+r}=\arg\frac{\beta-r}{\alpha-(-r)}=\pm\frac{\pi}{2}$$

これよりBC$\perp$ADとなり，点B(β)は直線 AC 上にある。そして，AC は実軸にも虚軸にも平行でないので，A(α)に対して原点以外の虚軸上の点B(β)はただ1つ決まる。

すなわち，vが純虚数となる純虚数βはただ1つ存在する。

(3)　複素数zに対し，複素数平面上でP(z)とおく。



$w=\dfrac{z-|\alpha|}{\alpha+|\alpha|}=\dfrac{z-r}{\alpha+r}$とおくと，$w$は純虚数なので，

$$\arg w=\arg\frac{z-r}{\alpha+r}=\arg\frac{z-r}{\alpha-(-r)}=\pm\frac{\pi}{2}$$

これよりPC$\perp$ADとなり，点P(z)は直線AC上を動く。すると，$|z|$が最小となるのは，P(z)が原点 O から AC に下ろした垂線の足$\mathrm{P}_0(z_0)$に一致するときである。

このとき，点P_0は線分ACの中点となるので，$z_0=\dfrac{\alpha+r}{2}=\dfrac{\alpha+|\alpha|}{2}$である。

［解 説］

複素数平面の問題です。まず，共役複素数を利用して(1)と(2)を解いたのですが，その方法では(3)の処理がたいへん複雑になり，方針を転換しました。そして，図形的に説明したのが上の解答例です。