

1

解答例のページへ

実数の組 (a, r) に関する以下の条件(A)を考える。

(A) 初項 a , 公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ は, すべての正の整数 n について,

$\tan a_{n+1} = \tan 3a_n$ を満たす。ただし, いずれの正の整数 n に対しても, a_n および $3a_n$ は $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k は整数) の形でない。

- (1) 組 (a, r) が条件(A)を満たすとき, $\tan ar = \tan 3a$ および $\tan ar^2 = \tan 3ar$ が成り立つことを示せ。
- (2) 組 (a, r) が条件(A)を満たし, かつ $\frac{a}{\pi}$ が無理数であるとき, $r = 3$ であることを示せ。
- (3) 組 $(\frac{2}{5}\pi, r)$ が条件(A)を満たすとき, r は整数であることを示せ。
- (4) $1 \leq r \leq 10$ を満たす r で, 組 $(\frac{2}{5}\pi, r)$ が条件(A)を満たすものをすべて求めよ。

2[解答例のページへ](#)

正の実数 p に対して、 $f(x) = x^3 - x + p$ とする。

- (1) x についての方程式 $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつとき、 p のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) a, b, c は実数で $c > 0$ とする。また、 i を虚数単位とする。 $a, b + ci, b - ci$ が方程式 $f(x) = 0$ の解であるとき、 a, c, p をそれぞれ b を用いて表し、 b のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) (2) の b, c について、少なくともどちらか一方は整数でないことを示せ。

3

解答例のページへ

座標平面において円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ を C とする。 a を 1 より大きい実数とし、2 点 $A(2a, 0)$, $B(-a, 0)$ をとる。点 A を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが小さい方を l_1 とし、点 B を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが大きい方を l_2 とする。 l_1 と l_2 の交点を D とする。

- (1) 直線 l_1 の方程式を a を用いて表せ。
- (2) 点 D から x 軸へ下ろした垂線と x 軸の交点を H とする。 $\triangle BHD$ と $\triangle ADH$ の面積の比が $5:4$ であるとき、 a の値を求めよ。
- (3) a が(2)で求めた値であるとき、 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。また、 $\triangle ABD$ の外接円の中心と半径を求めよ。

1

問題のページへ

数列 $\{a_n\}$ は、初項 a 、公比 r の等比数列より $a_n = ar^{n-1}$ となり、条件(A)は、 a_n と $3a_n$ が $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k は整数) の形でなく、

$$\tan a_{n+1} = \tan 3a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(1) $n=1, 2$ のとき、 $\textcircled{1}$ から、 $\tan a_2 = \tan 3a_1$ 、 $\tan a_3 = \tan 3a_2$ となり、

$$\tan ar = \tan 3a, \quad \tan ar^2 = \tan 3ar$$

(2) n_1, n_2 を整数として、(1) から $ar = 3a + n_1\pi$ 、 $ar^2 = 3ar + n_2\pi$ となり、

$$(r-3)a = n_1\pi \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad r(r-3)a = n_2\pi \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 $r \neq 3$ とすると、 $\textcircled{2}$ から $\frac{a}{\pi} = \frac{n_1}{r-3}$ となり、 $\frac{a}{\pi}$ が無理数より $n_1 \neq 0$ である。

すると、 $\textcircled{3}$ から $r(r-3) \cdot \frac{n_1}{r-3} = n_2$ となり $r = \frac{n_2}{n_1}$ より、 r は有理数である。

ところが、このとき $\frac{n_1}{r-3}$ は有理数となり、 $\frac{a}{\pi}$ が無理数であることに反する。

したがって、 $r=3$ であり、このとき $a_{n+1} = a \cdot 3^n = 3a_n$ となり、 $\textcircled{1}$ は成立する。

(3) $a = \frac{2}{5}\pi$ のとき、 $\textcircled{2}\textcircled{3}$ から、 $\frac{2}{5}(r-3) = n_1 \cdots \cdots \textcircled{4}$ 、 $\frac{2}{5}r(r-3) = n_2 \cdots \cdots \textcircled{5}$

(i) $n_1 = 0$ のとき $\textcircled{4}$ から $r=3$ となる。

(ii) $n_1 \neq 0$ のとき $\textcircled{4}\textcircled{5}$ から $r = \frac{n_2}{n_1}$ となり、 $\textcircled{4}$ に代入して $\frac{2}{5}\left(\frac{n_2}{n_1} - 3\right) = n_1$ から、

$$2(n_2 - 3n_1) = 5n_1^2 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{6}$ の左辺は偶数なので、右辺 $5n_1^2$ は偶数、すなわち n_1 は偶数になる。

そこで、 m_1 を 0 でない整数として、 $n_1 = 2m_1$ とおくと、 $\textcircled{6}$ から、

$$2(n_2 - 3 \cdot 2m_1) = 5 \cdot 4m_1^2, \quad n_2 - 6m_1 = 10m_1^2$$

すると、 $n_2 = 10m_1^2 + 6m_1 = 2(5m_1^2 + 3m_1)$ となり、 n_2 は偶数となる。

そこで、 m_2 を整数として、 $n_2 = 2m_2$ とおくと、 $2m_2 = 2(5m_1^2 + 3m_1)$ より、

$$m_2 = 5m_1^2 + 3m_1$$

これから、 $r = \frac{n_2}{n_1} = \frac{2m_2}{2m_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{5m_1^2 + 3m_1}{m_1} = 5m_1 + 3$ となり、 r は整数である。

(i)(ii) より、 $\textcircled{1}$ を満たす r は整数である。

(4) $a = \frac{2}{5}\pi$ のとき、(3) から、 $1 \leq r \leq 10$ を満たすものは、

(i) $n_1 = 0$ のとき $r=3$ となり、このとき $\textcircled{1}$ は成り立ち、条件(A)を満たす。

(ii) $n_1 \neq 0$ のとき $r = 5m_1 + 3$ ($m_1 \neq 0$) と表せ、 $1 \leq 5m_1 + 3 \leq 10$ となる。

すると、 $m_1 = 1$ から $r=8$ となり、 $a_n = \frac{2}{5}\pi \cdot 8^{n-1} = \frac{2 \cdot 8^{n-1}}{5}\pi$ であり、

$$a_{n+1} - 3a_n = \frac{2 \cdot 8^n}{5}\pi - \frac{6 \cdot 8^{n-1}}{5}\pi = \frac{(16-6) \cdot 8^{n-1}}{5}\pi = 2 \cdot 8^{n-1}\pi$$

これより, $\tan a_{n+1} = \tan(3a_n + 2 \cdot 8^{n-1} \pi) = \tan 3a_n$ となり, このとき①は成り立ち, 条件(A)を満たす。

(i)(ii)より, $1 \leq r \leq 10$ で条件(A)を満たす r は, $r = 3, 8$ である。

[コメント]

三角関数と整数を融合した難度の高い問題です。(1)で得られた必要条件をもとに式変形をしていきます。

2

問題のページへ

- (1) $f(x) = x^3 - x + p$ ($p > 0$) に対し、 $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつのは、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸がただ 1 つの共有点をもつことに対応し、

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$f(x)$ の増減は右表のようになり、

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3} + p$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{9}\sqrt{3} + p$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

求める条件は、 $p > 0$ に注意すると、 $-\frac{2}{9}\sqrt{3} + p > 0$ より $p > \frac{2}{9}\sqrt{3} \cdots \cdots \textcircled{1}$ である。

- (2) $a, b+ci, b-ci$ が方程式 $f(x) = 0$ の解であるとき、解と係数の関係より、

$$a + (b+ci) + (b-ci) = 0, \quad a(b+ci) + (b+ci)(b-ci) + a(b-ci) = -1$$

まとめると、 $a + 2b = 0$, $2ab + b^2 + c^2 = -1$ となり、 $c > 0$ から、

$$a = -2b \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad c = \sqrt{-2ab - b^2 - 1} = \sqrt{4b^2 - b^2 - 1} = \sqrt{3b^2 - 1} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、 $a(b+ci)(b-ci) = -p$ から、 $p = -a(b^2 + c^2)$ となり、 $\textcircled{2}\textcircled{3}$ から、

$$p = 2b(b^2 + 3b^2 - 1) = 2b(4b^2 - 1) = 8b^3 - 2b \cdots \cdots \textcircled{4}$$

そして、 b のとりうる値の範囲は、 $\textcircled{3}$ および $\textcircled{1}\textcircled{4}$ から、

$$c = \sqrt{3b^2 - 1} > 0 \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad p = 8b^3 - 2b > \frac{2}{9}\sqrt{3} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}$ より $3b^2 - 1 > 0$ となり、 $(\sqrt{3}b+1)(\sqrt{3}b-1) > 0$ から、 $b < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} < b \cdots \cdots \textcircled{7}$

$\textcircled{6}$ より $36b^3 - 9b - \sqrt{3} > 0$ となり、 $(3b - \sqrt{3})(12b^2 + 4\sqrt{3}b + 1) > 0$ から、

$$(3b - \sqrt{3})(2\sqrt{3}b + 1)^2 > 0, \quad b > \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}\textcircled{8}$ より、求める b のとりうる値の範囲は、 $b > \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

- (3) $\textcircled{3}$ から $c = \sqrt{3b^2 - 1}$ より $c^2 = 3b^2 - 1$ となり、 $c^2 + 1 = 3b^2 \cdots \cdots \textcircled{9}$

ここで、 b と c がともに整数と仮定すると、 $\textcircled{9}$ の右辺は 3 の倍数となり、左辺は、

$$\bullet c \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき } c^2 + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\bullet c \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } c^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\bullet c \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } c^2 + 1 \equiv 5 \equiv 2 \pmod{3}$$

これより、 $\textcircled{9}$ の左辺は 3 の倍数ではないことより、 $\textcircled{9}$ は成立しない。

以上より、 b, c の少なくともどちらか一方は整数でない。

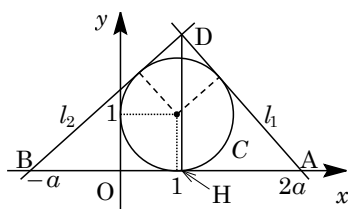
[コメント]

標準的な 3 次方程式の問題に整数が絡んでいます。量的にはやや多めです。

3

問題のページへ

$a > 1$ のとき、2 点 $A(2a, 0)$ 、 $B(-a, 0)$ から、円 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ に接線を引く。点 A を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが小さい方を l_1 、点 B を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが大きい方を l_2 とし、 l_1 と l_2 の交点を D とする。



- (1) l_1 の傾きを p とおくと、 $l_1: y = p(x-2a)$ ($p < 0$) と表され、円 C の中心 $(1, 1)$ と $l_1: px - y - 2ap = 0$ の距離が C の半径 1 に等しいことより、

$$\frac{|p-1-2ap|}{\sqrt{p^2+1}} = 1, \quad |(1-2a)p-1| = \sqrt{p^2+1}$$

両辺 2 乗して、 $(1-2a)^2 p^2 - 2(1-2a)p + 1 = p^2 + 1$ となり、

$$(4a^2 - 4a)p^2 - 2(1-2a)p = 0, \quad 2a(a-1)p^2 + (2a-1)p = 0$$

$a > 1$ で $p < 0$ から、 $p = -\frac{2a-1}{2a(a-1)}$ となり、 l_1 の方程式は、

$$y = -\frac{2a-1}{2a(a-1)}(x-2a) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (2) l_2 の傾きを q とおくと、 $l_2: y = q(x+a)$ ($q > 0$) と表され、(1)と同様にすると、

$$q = -\frac{-a-1}{-a(-\frac{a}{2}-1)} = \frac{2(a+1)}{a(a+2)}$$

これより、 l_2 の方程式は、 $y = \frac{2(a+1)}{a(a+2)}(x+a) \cdots \cdots \textcircled{2}$

さて、①②を連立すると、 $-\frac{2a-1}{2a(a-1)}(x-2a) = \frac{2(a+1)}{a(a+2)}(x+a)$ から、

$$-(2a-1)(a+2)(x-2a) = 4(a+1)(a-1)(x+a)$$

$-(2a^2 + 3a - 2)(x - 2a) = (4a^2 - 4)(x + a)$ から、 $(6a^2 + 3a - 6)x = 6a^2$ となる。

$a > 1$ から、点 D の x 座標は $x = \frac{2a^2}{2a^2 + a - 2}$ であり、点 D から x 軸へ下ろした垂

線の足 H の座標は $H(\frac{2a^2}{2a^2 + a - 2}, 0)$ となる。

さて、 $\triangle BHD$ と $\triangle ADH$ の面積の比が $5:4$ から、 $BH:AH = 5:4$ となり、

$$BH = \frac{2a^2}{2a^2 + a - 2} + a, \quad AH = 2a - \frac{2a^2}{2a^2 + a - 2}$$

$5AH = 4BH$ から、 $5(2a - \frac{2a^2}{2a^2 + a - 2}) = 4(\frac{2a^2}{2a^2 + a - 2} + a)$ となり、

$$6a = 9 \cdot \frac{2a^2}{2a^2 + a - 2}, \quad a(2a^2 + a - 2) = 3a^2$$

すると、 $a > 1$ から $a^2 - a - 1 = 0$ となり、 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

(3) $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき、①②から、

$$pq = -\frac{2a-1}{2a(a-1)} \cdot \frac{2(a+1)}{a(a+2)} = -\frac{(2a-1)(a+1)}{a^2(a-1)(a+2)} = -\frac{(2a-1)(a+1)}{a^2(a^2+a-2)}$$

ここで、 $a^2 = a+1$ より、 $a^2 + a - 2 = (a+1) + a - 2 = 2a - 1$ となり、

$$pq = -\frac{(2a-1)(a+1)}{(a+1)(2a-1)} = -1$$

これより、 l_1 と l_2 は直交し、 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ である。

このとき、直角三角形 ABD の外接円の直径は辺 AB となり、外接円の中心は辺 AB の中点より $\left(\frac{2a-a}{2}, 0\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, 0\right)$ となる。

また、外接円の半径は、 $\frac{1}{2}AB = \frac{2a-(-a)}{2} = \frac{3}{2}a = \frac{3+3\sqrt{5}}{4}$ である。

[コメント]

円と接線を題材にした問題ですが、かなりのボリュームがあります。そのため、たとえば q の値を求める際に、 p の $2a$ を $-a$ に置き換えるような工夫がショートカットのポイントになります。