1

解答例のページへ

実数の組$(a,\ r)$に関する以下の条件(A)を考える。

(A) 初項 a, 公比 r の等比数列$\{a_n\}$は，すべての正の整数 n について，$\tan a_{n+1}=\tan 3a_n$を満たす。ただし，いずれの正の整数 n に対しても，a_nおよび$3a_n$は$\dfrac{1}{2}\pi+k\pi$ (kは整数) の形でない。

(1) 組$(a,\ r)$が条件(A)を満たすとき，$\tan ar=\tan 3a$および$\tan ar^2=\tan 3ar$が成り立つことを示せ。

(2) 組$(a,\ r)$が条件(A)を満たし，かつ$\dfrac{a}{\pi}$が無理数であるとき，$r=3$であることを示せ。

(3) 組$\left(\dfrac{2}{5}\pi,\ r\right)$が条件(A)を満たすとき，$r$は整数であることを示せ。

(4) $1\leqq r\leqq 10$を満たすrで，組$\left(\dfrac{2}{5}\pi,\ r\right)$が条件(A)を満たすものをすべて求めよ。

2

解答例のページへ

正の実数 p に対して，$f(x)=x^3-x+p$ とする。

(1)　x についての方程式 $f(x)=0$ がただ 1 つの実数解をもつとき，p のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　a, b, c は実数で $c>0$ とする。また，i を虚数単位とする。a，$b+ci$，$b-ci$ が方程式 $f(x)=0$ の解であるとき，a, c, p をそれぞれ b を用いて表し，b のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　(2)の b, c について，少なくともどちらか一方は整数でないことを示せ。

3

解答例のページへ

座標平面において円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ を C とする。a を 1 より大きい実数とし，2 点 $\mathrm{A}(2a,\ 0)$，$\mathrm{B}(-a,\ 0)$ をとる。点 A を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが小さい方を l_1 とし，点 B を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが大きい方を l_2 とする。l_1 と l_2 の交点を D とする。

(1)　直線 l_1 の方程式を a を用いて表せ。

(2)　点 D から x 軸へ下ろした垂線と x 軸の交点を H とする。△BHD と△ADH の面積の比が 5 : 4 であるとき，a の値を求めよ。

(3)　a が(2)で求めた値であるとき，$\angle \mathrm{ADB}=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。また，△ABD の外接円の中心と半径を求めよ。

4

解答例のページへ

i を虚数単位とする。a は 1 でない正の実数の定数とする。複素数平面において，方程式 $|z-a^2i|=a|z-i|$ を満たす点 z が表す図形を C とする。

(1) 図形 C は原点 O を中心とする円であることを示し，その半径を求めよ。

以下の問いでは点 z は円 C 上を動くとし，z の偏角を θ とする。ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。また，$w=z-\dfrac{1}{z}$ とおく。

(2) $|w-2i|^2$ を a と $\sin\theta$ を用いて表せ。

(3) $|w-2i|+|w+2i|$ は点 z の位置によらない定数であることを示せ。

5

解答例のページへ

$f(x)=\dfrac{\sin(\log x)}{x}$ $(x>1)$ について以下の問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ。

(2)　n を正の整数とする。関数 $f(x)$ が極大値をとる x で，$e^{2(n-1)\pi}<x<e^{2n\pi}$ となるものがただ 1 つ存在することを示せ。また，関数 $f(x)$ が極小値をとる x で，$e^{2(n-1)\pi}<x<e^{2n\pi}$ となるものがただ 1 つだけ存在することを示せ。

(3)　正の整数 n に対して，(2)の極大値をとる x を α_n，極小値をとる x を β_n とする。このとき，$\dfrac{1}{\pi}\left\{\log\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f''(\alpha_n)\right|-\log\left|\sum_{n=1}^{\infty}f''(\beta_n)\right|\right\}$ は整数となる。その値を求めよ。

6

解答例のページへ

$f(x)=\sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}$ $(x \geqq 0)$ とし，$\alpha=\displaystyle\int_0^5 f(x)dx$ とする。

(1)　$f(x)$ $(x \geqq 0)$ が最大値をとることを示し，その値 M を求めよ。

(2)　$0 \leqq x \leqq 5$ において $e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x} \leqq f(x)$ を示せ。また，$\dfrac{10}{3}f(5) \leqq \alpha$ を示せ。

(3)　M は(1)で求めたものとし，実数 t は $\dfrac{2}{3}f(5) \leqq t \leqq M$ の範囲を動くとする。曲線 $y=f(x)-t$ $(x \geqq 0)$，2 直線 $x=0$，$x=5$，および x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ の最小値を α を用いて表せ。

1

問題のページへ

数列$\{a_n\}$は，初項 a，公比 r の等比数列より $a_n=ar^{n-1}$ となり，条件(A)は，a_n と $3a_n$ が $\frac{1}{2}\pi+k\pi$ (k は整数) の形でなく，

$$\tan a_{n+1}=\tan 3a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots①$$

(1)　$n=1,\ 2$ のとき，①から，$\tan a_2=\tan 3a_1$，$\tan a_3=\tan 3a_2$ となり，

$$\tan ar=\tan 3a,\quad \tan ar^2=\tan 3ar$$

(2)　n_1，n_2 を整数として，(1)から $ar=3a+n_1\pi$，$ar^2=3ar+n_2\pi$ となり，

$$(r-3)a=n_1\pi\cdots\cdots②,\quad r(r-3)a=n_2\pi\cdots\cdots③$$

ここで，$r\neq 3$ とすると，②から $\frac{a}{\pi}=\frac{n_1}{r-3}$ となり，$\frac{a}{\pi}$ が無理数より $n_1\neq 0$ である。

すると，③から $r(r-3)\cdot\frac{n_1}{r-3}=n_2$ となり $r=\frac{n_2}{n_1}$ より，r は有理数である。

ところが，このとき $\frac{n_1}{r-3}$ は有理数となり，$\frac{a}{\pi}$ が無理数であることに反する。

したがって，$r=3$ であり，このとき $a_{n+1}=a\cdot 3^n=3a_n$ となり，①は成立する。

(3)　$a=\frac{2}{5}\pi$ のとき，②③から，$\frac{2}{5}(r-3)=n_1\cdots\cdots④$，$\frac{2}{5}r(r-3)=n_2\cdots\cdots⑤$

(i)　$n_1=0$ のとき　④から $r=3$ となる。

(ii)　$n_1\neq 0$ のとき　④⑤から $r=\frac{n_2}{n_1}$ となり，④に代入して $\frac{2}{5}\left(\frac{n_2}{n_1}-3\right)=n_1$ から，

$$2(n_2-3n_1)=5n_1^2\cdots\cdots⑥$$

⑥の左辺は偶数なので，右辺 $5n_1^2$ は偶数，すなわち n_1 は偶数になる。

そこで，m_1 を 0 でない整数として，$n_1=2m_1$ とおくと，⑥から，

$$2(n_2-3\cdot 2m_1)=5\cdot 4m_1^2,\quad n_2-6m_1=10m_1^2$$

すると，$n_2=10m_1^2+6m_1=2(5m_1^2+3m_1)$ となり，n_2 は偶数となる。

そこで，m_2 を整数として，$n_2=2m_2$ とおくと，$2m_2=2(5m_1^2+3m_1)$ より，

$$m_2=5m_1^2+3m_1$$

これから，$r=\frac{n_2}{n_1}=\frac{2m_2}{2m_1}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{5m_1^2+3m_1}{m_1}=5m_1+3$ となり，r は整数である。

(i)(ii)より，①を満たす r は整数である。

(4)　$a=\frac{2}{5}\pi$ のとき，(3)から，$1\leqq r\leqq 10$ を満たすものは，

(i)　$n_1=0$ のとき　$r=3$ となり，このとき①は成り立ち，条件(A)を満たす。

(ii)　$n_1\neq 0$ のとき　$r=5m_1+3$ ($m_1\neq 0$) と表せ，$1\leqq 5m_1+3\leqq 10$ となる。

すると，$m_1=1$ から $r=8$ となり，$a_n=\frac{2}{5}\pi\cdot 8^{n-1}=\frac{2\cdot 8^{n-1}}{5}\pi$ であり，

$$a_{n+1}-3a_n=\frac{2\cdot 8^n}{5}\pi-\frac{6\cdot 8^{n-1}}{5}\pi=\frac{(16-6)\cdot 8^{n-1}}{5}\pi=2\cdot 8^{n-1}\pi$$

© 電送数学舎 2025

これより，$\tan a_{n+1} = \tan(3a_n + 2\cdot 8^{n-1}\pi) = \tan 3a_n$ となり，このとき①は成り立ち，条件(A)を満たす。

(i)(ii)より，$1 \leqq r \leqq 10$ で条件(A)を満たす r は，$r = 3,\ 8$ である。

［コメント］

三角関数と整数を融合した難度の高い問題です。(1)で得られた必要条件をもとに式変形をしていきます。

© 電送数学舎 2025

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-x+p$ $(p>0)$ に対し，$f(x)=0$ がただ 1 つの実数解をもつのは，$y=f(x)$ のグラフと x 軸がただ 1 つの共有点をもつことに対応し，

$f'(x)=3x^2-1$

$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}+p$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{9}\sqrt{3}+p$

求める条件は，$p>0$ に注意すると，$-\frac{2}{9}\sqrt{3}+p>0$ より $p>\frac{2}{9}\sqrt{3}$ ……①である。

(2)　a，$b+ci$，$b-ci$ が方程式 $f(x)=0$ の解であるとき，解と係数の関係より，

$a+(b+ci)+(b-ci)=0$，$a(b+ci)+(b+ci)(b-ci)+a(b-ci)=-1$

まとめると，$a+2b=0$，$2ab+b^2+c^2=-1$ となり，$c>0$ から，

$a=-2b$ ……②，$c=\sqrt{-2ab-b^2-1}=\sqrt{4b^2-b^2-1}=\sqrt{3b^2-1}$ ……③

また，$a(b+ci)(b-ci)=-p$ から，$p=-a(b^2+c^2)$ となり，②③から，

$p=2b(b^2+3b^2-1)=2b(4b^2-1)=8b^3-2b$ ……④

そして，b のとりうる値の範囲は，③および①④から，

$c=\sqrt{3b^2-1}>0$ ……⑤，$p=8b^3-2b>\frac{2}{9}\sqrt{3}$ ……⑥

⑤より $3b^2-1>0$ となり，$(\sqrt{3}b+1)(\sqrt{3}b-1)>0$ から，$b<-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}<b$ ……⑦

⑥より $36b^3-9b-\sqrt{3}>0$ となり，$(3b-\sqrt{3})(12b^2+4\sqrt{3}b+1)>0$ から，

$(3b-\sqrt{3})(2\sqrt{3}b+1)^2>0$，$b>\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ……⑧

⑦⑧より，求める b のとりうる値の範囲は，$b>\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3)　③から $c=\sqrt{3b^2-1}$ より $c^2=3b^2-1$ となり，$c^2+1=3b^2$ ……⑨

ここで，b と c がともに整数と仮定すると，⑨の右辺は 3 の倍数となり，左辺は，

- $c\equiv 0 \pmod 3$ のとき　$c^2+1\equiv 1 \pmod 3$
- $c\equiv 1 \pmod 3$ のとき　$c^2+1\equiv 2 \pmod 3$
- $c\equiv 2 \pmod 3$ のとき　$c^2+1\equiv 5\equiv 2 \pmod 3$

これより，⑨の左辺は 3 の倍数ではないことより，⑨は成立しない。

以上より，b, c の少なくともどちらか一方は整数でない。

［コメント］

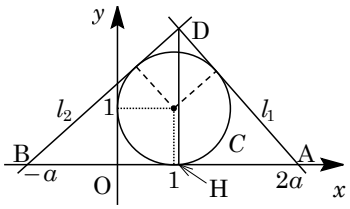
標準的な 3 次方程式の問題に整数が絡んでいます。量的にはやや多めです。

© 電送数学舎 2025

3

問題のページへ

$a>1$ のとき，2 点 $\mathrm{A}(2a,\ 0)$，$\mathrm{B}(-a,\ 0)$ から，円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ に接線を引く。点 A を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが小さい方を l_1，点 B を通る円 C の 2 本の接線のうち傾きが大きい方を l_2 とし，l_1 と l_2 の交点を D とする。



(1)　l_1 の傾きを p とおくと，$l_1:y=p(x-2a)\ (p<0)$ と表され，円 C の中心 $(1,\ 1)$ と $l_1:px-y-2ap=0$ の距離が C の半径 1 に等しいことより，

$$\frac{|p-1-2ap|}{\sqrt{p^2+1}}=1,\ |(1-2a)p-1|=\sqrt{p^2+1}$$

両辺 2 乗して，$(1-2a)^2p^2-2(1-2a)p+1=p^2+1$ となり，

$$(4a^2-4a)p^2-2(1-2a)p=0,\ 2a(a-1)p^2+(2a-1)p=0$$

$a>1$ で $p<0$ から，$p=-\dfrac{2a-1}{2a(a-1)}$ となり，l_1 の方程式は，

$$y=-\frac{2a-1}{2a(a-1)}(x-2a)\cdots\cdots①$$

(2)　l_2 の傾きを q とおくと，$l_2:y=q(x+a)\ (q>0)$ と表され，(1)と同様にすると，

$$q=-\frac{-a-1}{-a\left(-\frac{a}{2}-1\right)}=\frac{2(a+1)}{a(a+2)}$$

これより，l_2 の方程式は，$y=\dfrac{2(a+1)}{a(a+2)}(x+a)\cdots\cdots②$

さて，①②を連立すると，$-\dfrac{2a-1}{2a(a-1)}(x-2a)=\dfrac{2(a+1)}{a(a+2)}(x+a)$ から，

$$-(2a-1)(a+2)(x-2a)=4(a+1)(a-1)(x+a)$$

$-(2a^2+3a-2)(x-2a)=(4a^2-4)(x+a)$ から，$(6a^2+3a-6)x=6a^2$ となる。

$a>1$ から，点 D の x 座標は $x=\dfrac{2a^2}{2a^2+a-2}$ であり，点 D から x 軸へ下ろした垂線の足 H の座標は $\mathrm{H}\left(\dfrac{2a^2}{2a^2+a-2},\ 0\right)$ となる。

さて，△BHD と△ADH の面積の比が 5 : 4 から，BH : AH = 5 : 4 となり，

$$\mathrm{BH}=\frac{2a^2}{2a^2+a-2}+a,\ \mathrm{AH}=2a-\frac{2a^2}{2a^2+a-2}$$

$5\mathrm{AH}=4\mathrm{BH}$ から，$5\left(2a-\dfrac{2a^2}{2a^2+a-2}\right)=4\left(\dfrac{2a^2}{2a^2+a-2}+a\right)$ となり，

$$6a=9\cdot\frac{2a^2}{2a^2+a-2},\ a(2a^2+a-2)=3a^2$$

すると，$a>1$ から $a^2-a-1=0$ となり，$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

© 電送数学舎 2025

(3)　$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，①②から，

$$pq=-\frac{2a-1}{2a(a-1)}\cdot\frac{2(a+1)}{a(a+2)}=-\frac{(2a-1)(a+1)}{a^2(a-1)(a+2)}=-\frac{(2a-1)(a+1)}{a^2(a^2+a-2)}$$

ここで，$a^2=a+1$ より，$a^2+a-2=(a+1)+a-2=2a-1$ となり，

$$pq=-\frac{(2a-1)(a+1)}{(a+1)(2a-1)}=-1$$

これより，l_1 と l_2 は直交し，$\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{\pi}{2}$ である。

このとき，直角三角形 ABD の外接円の直径は辺 AB となり，外接円の中心は辺 AB の中点より $\left(\dfrac{2a-a}{2},\ 0\right)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4},\ 0\right)$ となる。

また，外接円の半径は，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{2a-(-a)}{2}=\dfrac{3}{2}a=\dfrac{3+3\sqrt{5}}{4}$ である。

［コメント］

円と接線を題材にした問題ですが，かなりのボリュームがあります。そのため，たとえば q の値を求める際に，p の $2a$ を $-a$ に置き換えるような工夫がショートカットのポイントになります。

© 電送数学舎 2025

4

問題のページへ

(1)　$a>0$，$a\neq 1$のとき，$|z-a^2i|=a|z-i|$に対し，$|z-a^2i|^2=a^2|z-i|^2$として，

$(z-a^2i)(\overline{z}+a^2i)=a^2(z-i)(\overline{z}+i)$

$z\overline{z}+a^2iz-a^2i\overline{z}+a^4=a^2(z\overline{z}+iz-i\overline{z}+1)$となり，$(a^2-1)z\overline{z}=a^2(a^2-1)$

$a^2-1\neq 0$より，$z\overline{z}=a^2$すなわち$|z|^2=a^2$となり，$|z|=a$から，点 z が表す図形 C は原点 O を中心とする半径 a の円である。

(2)　(1)から，$z=a(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$とおくことができ，

$$w-2i=\left(z-\frac{1}{z}\right)-2i=a(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{1}{a}(\cos\theta-i\sin\theta)-2i$$

$$=\left(a-\frac{1}{a}\right)\cos\theta+i\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)\sin\theta-2\right\}$$

$$|w-2i|^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\cos^2\theta+\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)\sin\theta-2\right\}^2$$

$$=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2(1-\sin^2\theta)+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\sin^2\theta-4\left(a+\frac{1}{a}\right)\sin\theta+4$$

$$=4\sin^2\theta-4\left(a+\frac{1}{a}\right)\sin\theta+a^2+\frac{1}{a^2}+2$$

$$=4\sin^2\theta-4\left(a+\frac{1}{a}\right)\sin\theta+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(2\sin\theta-a-\frac{1}{a}\right)^2$$

(3)　$w+2i=\left(a-\frac{1}{a}\right)\cos\theta+i\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)\sin\theta+2\right\}$より，

$$|w+2i|^2=4\sin^2\theta+4\left(a+\frac{1}{a}\right)\sin\theta+\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(2\sin\theta+a+\frac{1}{a}\right)^2$$

これより，$|w-2i|+|w+2i|=\left|2\sin\theta-a-\frac{1}{a}\right|+\left|2\sin\theta+a+\frac{1}{a}\right|$

さて，$a>0$から，相加平均と相乗平均の関係より，$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$となり，等号成立は$a=\frac{1}{a}$から$a=1$のときであるが，$a\neq 1$から等号は成り立たない。

すると，$a+\frac{1}{a}>2$となり，$-2\leqq 2\sin\theta\leqq 2$から，

$2\sin\theta-a-\frac{1}{a}<0$，$2\sin\theta+a+\frac{1}{a}>0$

以上より，$|w-2i|+|w+2i|=-\left(2\sin\theta-a-\frac{1}{a}\right)+\left(2\sin\theta+a+\frac{1}{a}\right)=2a+\frac{2}{a}$

［コメント］

複素数平面上の図形についての標準的な問題です。

© 電送数学舎 2025

5

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\sin(\log x)}{x}$ $(x>1)$ に対して,

$$f'(x)=\frac{\cos(\log x)\cdot x^{-1}\cdot x-\sin(\log x)}{x^2}=\frac{\cos(\log x)-\sin(\log x)}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{\{-\sin(\log x)-\cos(\log x)\}\cdot x^{-1}\cdot x^2-\{\cos(\log x)-\sin(\log x)\}\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{\{-\sin(\log x)-\cos(\log x)\}-2\{\cos(\log x)-\sin(\log x)\}}{x^3}$$

$$=\frac{\sin(\log x)-3\cos(\log x)}{x^3}$$

(2)　$f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{x^2}\cos\left(\log x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ となり，$e^{2(n-1)\pi}<x<e^{2n\pi}$ において,

$$2(n-1)\pi<\log x<2n\pi,\ \ 2(n-1)\pi+\frac{\pi}{4}<\log x+\frac{\pi}{4}<2n\pi+\frac{\pi}{4}$$

すると，$f'(x)=0$ を満たすのは,

$$\log x+\frac{\pi}{4}=2(n-1)\pi+\frac{\pi}{2},\ \ \log x+\frac{\pi}{4}=2(n-1)\pi+\frac{3}{2}\pi$$

$\log x=2(n-1)\pi+\dfrac{\pi}{4}=\left(2n-\dfrac{7}{4}\right)\pi$，$\log x=2(n-1)\pi+\dfrac{5}{4}\pi=\left(2n-\dfrac{3}{4}\right)\pi$ となり,

$$x=e^{\left(2n-\frac{7}{4}\right)\pi},\ \ x=e^{\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi}$$

$f'(x)$ の符号は $x=e^{\left(2n-\frac{7}{4}\right)\pi}$ の前後で正から負へ，$x=e^{\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi}$ の前後で負から正へと変化するので，$f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	$e^{2(n-1)\pi}$	…	$e^{\left(2n-\frac{7}{4}\right)\pi}$	…	$e^{\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi}$	…	$e^{2n\pi}$
$f'(x)$		＋	0	−	0	＋	
$f(x)$	0	↗		↘		↗	0

したがって，$e^{2(n-1)\pi}<x<e^{2n\pi}$ において，$f(x)$ は $x=e^{\left(2n-\frac{7}{4}\right)\pi}$ で極大値をとり，$x=e^{\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi}$ で極小値をとる。

(3)　$\alpha_n=e^{\left(2n-\frac{7}{4}\right)\pi}$，$\beta_n=e^{\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi}$ となり，$\log\alpha_n=\left(2n-\dfrac{7}{4}\right)\pi$，$\log\beta_n=\left(2n-\dfrac{3}{4}\right)\pi$

$$f''(\alpha_n)=\frac{\sin(\log\alpha_n)-3\cos(\log\alpha_n)}{{\alpha_n}^3}=\frac{\sin\left(2n-\frac{7}{4}\right)\pi-3\cos\left(2n-\frac{7}{4}\right)\pi}{e^{3\left(2n-\frac{7}{4}\right)\pi}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{-\frac{21}{4}\pi}\cdot e^{6n\pi}}=-\sqrt{2}e^{\frac{21}{4}\pi}\cdot e^{-6n\pi}$$

© 電送数学舎 2025

すると，$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n)\right| = \left| -\sqrt{2}e^{\frac{21}{4}\pi} \cdot \frac{e^{-6\pi}}{1-e^{-6\pi}} \right| = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{21}{4}\pi}}{e^{6\pi}-1}$ となる。

$$f''(\beta_n) = \frac{\sin(\log\beta_n) - 3\cos(\log\beta_n)}{{\beta_n}^3} = \frac{\sin\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi - 3\cos\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi}{e^{3\left(2n-\frac{3}{4}\right)\pi}}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{e^{-\frac{9}{4}\pi}\cdot e^{6n\pi}} = \sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}\cdot e^{-6n\pi}$$

すると，$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n)\right| = \left| \sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi} \cdot \frac{e^{-6\pi}}{1-e^{-6\pi}} \right| = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}{e^{6\pi}-1}$ となる。

そこで，$N = \frac{1}{\pi}\left\{ \log\left|\sum_{n=1}^{\infty} f''(\alpha_n)\right| - \log\left|\sum_{n=1}^{\infty} f''(\beta_n)\right| \right\}$ とおくと，

$$N = \frac{1}{\pi}\left(\log\frac{\sqrt{2}e^{\frac{21}{4}\pi}}{e^{6\pi}-1} - \log\frac{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}{e^{6\pi}-1} \right) = \frac{1}{\pi}\left(\log\frac{\sqrt{2}e^{\frac{21}{4}\pi}}{e^{6\pi}-1}\cdot\frac{e^{6\pi}-1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}} \right) = \frac{1}{\pi}\log e^{\frac{21}{4}\pi-\frac{9}{4}\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\log e^{3\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot 3\pi = 3$$

［コメント］

微分と増減に無限級数を融合した問題です。内容は基本事項の積み重ねですが，要求される計算力はかなりのレベルです。

© 電送数学舎 2025

6

問題のページへ

(1)　$f(x)=\sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}$ $(x\geqq 0)$ に対して,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x^2}{4}}+\sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}\left(-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\frac{x^2}{4}}(1-x^2)$$

すると，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=1$ で最大値 $M=e^{-\frac{1}{4}}$ をとる。

x	0	…	1	…
$f'(x)$		＋	0	－
$f(x)$	0	↗	$e^{-\frac{1}{4}}$	↘

(2)　$f(x)-e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(e^{-\frac{x^2}{4}}-e^{-\frac{25}{4}}\right)$ となる。

ここで，$0\leqq x\leqq 5$ において，$e^{-\frac{25}{4}}\leqq e^{-\frac{x^2}{4}}\leqq 1$ から $e^{-\frac{x^2}{4}}-e^{-\frac{25}{4}}\geqq 0$ なので,

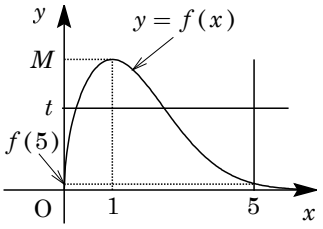
$$f(x)-e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x}\geqq 0,\quad e^{-\frac{25}{4}}\sqrt{x}\leqq f(x)\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\alpha=\displaystyle\int_0^5 f(x)dx$ とするとき，①から $e^{-\frac{25}{4}}\displaystyle\int_0^5\sqrt{x}\,dx\leqq\alpha$ となり,

$$e^{-\frac{25}{4}}\int_0^5\sqrt{x}\,dx=e^{-\frac{25}{4}}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^5=\frac{10}{3}\sqrt{5}e^{-\frac{25}{4}}=\frac{10}{3}f(5)$$

したがって，$\dfrac{10}{3}f(5)\leqq\alpha$ となる。

(3)　$\dfrac{2}{3}f(5)\leqq t\leqq M$ を満たす実数 t に対して，曲線 $y=f(x)-t$ $(x\geqq 0)$，2 直線 $x=0$，$x=5$，および x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(t)$ とする。



このとき，実数 t の値が $\dfrac{2}{3}f(5)\leqq t\leqq f(5)$ のときも，$f(5)\leqq t\leqq M$ のときも，$V(t)$ は,

$$V(t)=\pi\int_0^5\{f(x)-t\}^2dx=\pi\left[\int_0^5\{f(x)\}^2dx-2t\int_0^5 f(x)dx+t^2\int_0^5 dx\right]$$

$$=\pi\left[\int_0^5\{f(x)\}^2dx-2\alpha t+5t^2\right]$$

ここで，$\displaystyle\int_0^5\{f(x)\}^2dx=\int_0^5 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^5=1-e^{-\frac{25}{2}}$ より,

$$V(t)=\pi\left(1-e^{-\frac{25}{2}}-2\alpha t+5t^2\right)=\pi\left\{5\left(t-\frac{\alpha}{5}\right)^2+1-e^{-\frac{25}{2}}-\frac{\alpha^2}{5}\right\}\cdots\cdots\cdots②$$

さて，(2)から $\dfrac{10}{3}f(5)\leqq\alpha$ であり，また $f(x)\leqq M$ から,

$$\alpha=\int_0^5 f(x)dx\leqq\int_0^5 M\,dx=5M$$

まとめると，$\dfrac{10}{3}f(5)\leqq\alpha\leqq 5M$ より，$\dfrac{2}{3}f(5)\leqq\dfrac{\alpha}{5}\leqq M$ となる。

© 電送数学舎 2025

すると，実数 t は $\frac{2}{3}f(5) \leqq t \leqq M$ の範囲を動くので，②から，$V(t)$ は $t=\frac{\alpha}{5}$ のとき最小値 $\pi\left(1-e^{-\frac{25}{2}}-\frac{\alpha^2}{5}\right)$ をとる。

［コメント］

回転体の体積の最小値を求める問題です。(3)の問題文で与えられた t の範囲の意味は，$\frac{\alpha}{5}$ の範囲と②式を見るとわかります。

© 電送数学舎 2025