1

解答解説のページへ

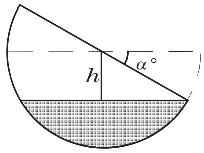
e を自然対数の底とする。関数 $f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^{x}}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$g(x)=(1+e^{x})^{2}f'(x)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)$ を求めよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$ を用いてもよい。

(2)　$f(x)$ はただ 1 つの極値をもち，さらにそれが極大値であることを示せ。

2

解答解説のページへ



　水を満たした半径 2 の半球形の容器がある。これを静かに $\alpha°$ 傾けたとき，水面が h だけ下がり，こぼれ出た水の量と容器に残った水の量の比が11 : 5 となった。h と α を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$, $g(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t\,dt$ と定める。このとき, $x \geqq 0$ における $f(x)$ の最大値と $g(x)$ の最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

実数を成分とする行列$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$に対して

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \# \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

と定める。また，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とする。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \# \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$を求めよ。

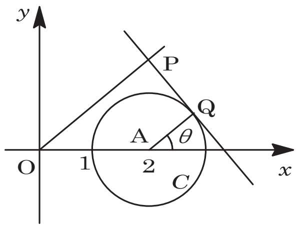
(2) 行列$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$について，$A \# X = E$を満たす 2 次正方行列$X$を求めよ。

(3) 行列$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対して，$P_n = \begin{pmatrix} a^n & k_n b \\ k_n c & d^n \end{pmatrix}$（$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とおく。ただし，$k_1 = 1$，$k_n = a^{n-1} + a^{n-2}d + \cdots + ad^{n-2} + d^{n-1}$（$n = 2,\ 3,\ \cdots$）とする。このとき，$P_{n+1} = P \# P_n$が成り立つことを示せ。

(4) (3)において$P_4 = E$ならば，$P_2 = E$であることを示せ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ



xy 平面上において，点A$(2,\ 0)$を中心とする半径 1 の円を C とする。C 上の点 Q における C の接線に原点O$(0,\ 0)$から下ろした垂線の足を P とする。図のように x 軸と線分 AQ のなす角をθとする。ただし，θは$-\pi<\theta\leqq\pi$を動くものとする。

(1) 点P$(x,\ y)$の座標$(x,\ y)$をθを用いて表せ。

(2) 点P$(x,\ y)$のx座標が最小になるとき, Pの座標$(x,\ y)$を求めよ。

(3) 直線$x=k$が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるとき, k のとりうる値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ より，$f'(x)=\dfrac{(1-e^{x-1})(1+e^x)-(x-e^{x-1})e^x}{(1+e^x)^2}$

条件より，$g(x)=(1+e^x)^2 f'(x)=(1-e^{x-1})(1+e^x)-(x-e^{x-1})e^x$

$$=1-e^{x-1}-xe^x+e^x=1-\left(x-1+\frac{1}{e}\right)e^x$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

また，$t=-x$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{t\to+\infty}(-t)e^{-t}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$ となるので，

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=1$

(2)　$g'(x)=-e^x-\left(x-1+\dfrac{1}{e}\right)e^x=-\left(x+\dfrac{1}{e}\right)e^x$

ここで，右表より $g\left(-\dfrac{1}{e}\right)>1>0$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ なので，$g(x)=0$ はただ 1 つの実数解を $x>-\dfrac{1}{e}$ においてもつ。

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{e}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

この実数解を $x=\alpha$ とすると，この値の前後で $g(x)$ の符号は正から負へと変わる。

すると，$f'(x)$ の符号も $x=\alpha$ の前後で正から負へと変わる。

x	$-\infty$	$\cdots$	α	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$f(x)$ は $x=\alpha$ においてのみ極値をもち，しかもそれは極大値である。

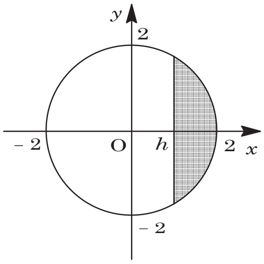
［解 説］

$f(x)$ の極値に関する問題ですが，(1)が(2)のていねいな誘導となっています。親切すぎるのではないかと思うほどですが。

$\boxed{2}$

問題のページへ

まず，$x^2+y^2=4\ \ (0\leqq x\leqq 2)$を x 軸のまわりに回転して容器を作ると考える。



半球形の容器の体積は，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi\cdot 2^3=\dfrac{16}{3}\pi$ となるので，こぼれ出た水の量は，条件より $\dfrac{11}{11+5}\cdot\dfrac{16}{3}\pi=\dfrac{11}{3}\pi$ となる。

したがって，$\pi\displaystyle\int_0^h(4-x^2)\,dx=\dfrac{11}{3}\pi$

$$4h-\frac{h^3}{3}=\frac{11}{3},\ \ h^3-12h+11=0,\ \ (h-1)(h^2+h-11)=0$$

$0<h<2$ より $h=1$ となり，このとき $\sin\alpha°=\dfrac{1}{2}$ なので，$\alpha=30$ である。

［解 説］

超有名問題です。最近では 97 年に島根医大で同じ構図の問題が出題されています。

3

問題のページへ

まず，$(e^{-t}\sin t)' = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$ ………①

$(e^{-t}\cos t)' = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$ ………②

①＋②より，$e^{-t}\sin t = -\frac{1}{2}\left\{e^{-t}(\sin t + \cos t)\right\}'$

①－②より，$e^{-t}\cos t = \frac{1}{2}\left\{e^{-t}(\sin t - \cos t)\right\}'$

$$f(x) = \int_0^x e^{-t}\sin t\,dt = -\frac{1}{2}\Big[e^{-t}(\sin t + \cos t)\Big]_0^x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \int_0^x e^{-t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\Big[e^{-t}(\sin t - \cos t)\Big]_0^x = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$$

さて，$f(x)$ が極大値をとるのは，$f'(x)$ の符号が正から負に変わるときなので，$f'(x) = e^{-x}\sin x$ より，$x = (2k-1)\pi$ （k は自然数）においてである。

$$f\big((2k-1)\pi\big) = -\frac{1}{2}e^{-(2k-1)\pi}(-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-(2k-1)\pi}\right)$$

すると，k の値が増加するに従って $f\big((2k-1)\pi\big)$ の値は減少するので，極大値が最大となるのは，$k=1$ すなわち $x=\pi$ のときである。

x	0	…	π	…	2π	…	3π	…
$f'(x)$	0	＋	0	－	0	＋	0	－
$f(x)$	0	↗		↘		↗		↘

したがって，増減表より，$f(x)$ の最大値は $f(\pi) = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$ となる。

また，$g(x)$ が極小値をとるのは，$g'(x)$ の符号が負から正に変わるときなので，$g'(x) = e^{-x}\cos x$ より，$x = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi$ （k は自然数）においてである。

$$g\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{1}{2}e^{-\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}(-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$$

すると，k の値が増加するに従って $g\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ の値も増加するので，極小値が最小となるのは，$k=1$ すなわち $x = \frac{3}{2}\pi$ においてである。

x	0	…	$\frac{1}{2}\pi$	…	$\frac{3}{2}\pi$	…	$\frac{5}{2}\pi$	…	$\frac{7}{2}\pi$	…
$g'(x)$		＋	0	－	0	＋	0	－	0	＋
$g(x)$	0	↗		↘		↗		↘		↗

ここで，$g\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{3}{2}\pi}\right) > g(0) = 0$ より，$g(x)$ の最小値は $g(0) = 0$ となる。

［解 説］

曲線 $y = e^{-t}\sin t$ と t 軸ではさまれた面積について考えると，結論はほぼ明らかです。これを明確に示すのが本問のねらいでしょう。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \# \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6+(-6) \\ 4+(-4) & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とすると，$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \# \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2a = 1$ ……①，$2b + 6d = 0$ ……②，$4a + 3c = 0$ ……③，$3d = 1$ ……④

①より$a = \dfrac{1}{2}$，③に代入して$c = -\dfrac{2}{3}$

④より$d = \dfrac{1}{3}$，②に代入して$b = -1$

よって，$X = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $P \# P_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \# \begin{pmatrix} a^n & k_n b \\ k_n c & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & k_n ab + bd^n \\ ca^n + k_n cd & d^{n+1} \end{pmatrix}$

ここで，$k_n ab + bd^n = (a^{n-1} + a^{n-2}d + \cdots + ad^{n-2} + d^{n-1})ab + bd^n$

$= (a^n + a^{n-1}d + \cdots + a^2 d^{n-2} + ad^{n-1} + d^n)b = k_{n+1}b$

$ca^n + k_n cd = ca^n + (a^{n-1} + a^{n-2}d + \cdots + ad^{n-2} + d^{n-1})cd$

$= (a^n + a^{n-1}d + a^{n-2}d^2 + \cdots + ad^{n-1} + d^n)c = k_{n+1}c$

以上より，$P_{n+1} = P \# P_n$

(4) $P_4 = E$のとき，$\begin{pmatrix} a^4 & k_4 b \\ k_4 c & d^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a^4 = d^4 = 1$ ……⑤，$k_4 b = k_4 c = 0$ ……⑥

⑤より，$a^2 = d^2 = 1$

(i) $k_4 = 0$のとき

$k_4 = a^3 + a^2 d + ad^2 + d^3 = 0$（このとき⑥は満たされている）

$a^2 = d^2 = 1$より$a + d + a + d = 0$，$a + d = 0$

すなわち$k_2 = 0$となり，$k_2 b = k_2 c = 0$

(ii) $k_4 \neq 0$のとき

⑥より$b = c = 0$となり，$k_2 b = k_2 c = 0$

(i)(ii)のいずれの場合も，$P_2 = \begin{pmatrix} a^2 & k_2 b \\ k_2 c & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

[解 説]

記号の意味どおりに演算を進めていけば，完答できる問題です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{AQ} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$，$Q(2+\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，

直線 PQ の方程式は，$\cos\theta(x-2-\cos\theta)+\sin\theta(y-\sin\theta)=0$

$x\cos\theta + y\sin\theta = 2\cos\theta+1$ ………①

直線 OP は PQ と垂直なので，その方程式は，$-x\sin\theta+y\cos\theta=0$ ………②

①②より，$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (2\cos\theta+1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (2\cos\theta+1)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (2\cos\theta+1)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

よって，$x=(2\cos\theta+1)\cos\theta$，$y=(2\cos\theta+1)\sin\theta$

(2) $x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とおくと，$f(-\theta)=f(\theta)$，$g(-\theta)=-g(\theta)$ より，点 P の軌跡は x 軸対称となる。以下，θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ を動くときを考える。

さて，$\dfrac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta\cos\theta+(2\cos\theta+1)(-\sin\theta)$

$= -\sin\theta(4\cos\theta+1)$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{4}$ の解を $\theta=\alpha$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とおくと，

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	－	0	＋	
x	3	↘	$-\dfrac{1}{8}$	↗	1

$\theta=\alpha$ のとき点 P の x 座標が最小になる。

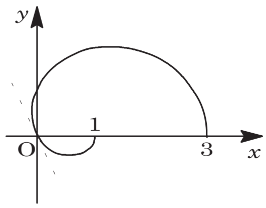
このとき $x=-\dfrac{1}{8}$，また $\sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ より，$y=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ となる。

x 軸に関する対称性を考えて, x 座標が最小の点 P の座標は，$\left(-\dfrac{1}{8},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{8}\right)$

(3) 原点を極, x 軸の正の部分を始線とする極座標を設定すると，点 P の軌跡は,

$r = 2\cos\theta+1$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ において r は単調減少し，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ では $r\geqq0$，$\dfrac{2}{3}\pi<\theta\leqq\pi$ では $r<0$ となるので，点 P の軌跡の概形は右図のような曲線になる。



さらに，この曲線とこれを x 軸対称した曲線とを合わせた曲線が，$-\pi<\theta\leqq\pi$ における点 P の軌跡である。

すると，直線 $x=k$ が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるのは，(2)の結果を用いて，$-\dfrac{1}{8}<k<0$，$0<k<1$ となる。

［解 説］

(3)でも，(2)と同じく y の増減を調べ，点 P の軌跡の概形を調べようかとも思いました。しかし，それほどの設問でもないので，極方程式で概形を考えました。